

**Exemple 1**

Factoriser, pour  $x, y \in \mathbb{C}$ , l'expression  $x^2 + y^2$ .

**Exemple 2**

Soit  $\omega \in \mathbb{R}$ . Déterminer les solutions de l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^2 + \omega^2 = 0$ .

**Exemple 3**

(i) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer les modules des nombres complexes :

$$(a) \ 1 - i\sqrt{3} \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad (b) \ \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}; \quad (c) \ \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

(ii) Montrer, l'équivalence, pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ ,

$$|z| = 1 \iff \frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}.$$

On rappelle que  $i\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des imaginaires purs.

**Exemple 4**

Déterminer les expressions algébriques de  $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ,  $e^{i\pi}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , de  $e^{\frac{2ni\pi}{3}}$ .

**Exemple 5**

Déterminer les solutions de l'équation d'inconnue  $\theta \in \mathbb{R}$  :  $|\cos \theta| = 1$ .

**Exemple 6**

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Déterminer une expression simple du module du nombre complexe  $1 + e^{i\theta}$ .

**Exemple 7**

Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos x = \sin x$ .

**Exemple 8**

Calculer  $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$ .

**Exemple 9**

Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ ,  $e^z = 1 + i$ .

**Exemple 10**

(i) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe  $1 + i$ .

(ii) Résoudre ainsi l'équation d'inconnue  $\delta \in \mathbb{C}$  :  $z^2 = 1 + i$  en exprimant les solutions sous forme exponentielle.

(iii) Résoudre l'équation d'inconnue  $\delta \in \mathbb{C}$  :  $z^2 = 1 + i$  en exprimant les solutions sous forme algébrique.

(iv) Déterminer finalement une formule pour  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

**Exemple 11**

---

Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

$$z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i = 0$$

On exprimera les solutions sous forme algébrique.

---

**Exemple 12**

---

Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :  $z^3 = i$ . On écrira les solutions sous forme algébrique et exponentielle.

---

**Exemple 13**

---

Soit  $\omega = e^{2i\pi/3}$ . Déterminer la valeur de  $1 + \omega + \omega^2$ .

---

**Exemple 14**

---

Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  vérifiant  $|z + 1| = |z - 1|$ .

---