Exemple 1

Déterminer dans chaque cas la matrice colonne des coordonnées du vecteur ou de la famille de vecteurs de l'espace E proposé dans la base $\mathscr{B}$ indiquée (les démonstrations du fait que les familles $\mathscr{B}$ sont des bases de l'espace E sont le cours ou dans le TD15).

(i) vecteur $x=(1,2,3)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ avec la base canonique $\mathscr{B}$;

(ii) vecteur $x=(1,2,3)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ avec la base $\mathscr{B}=\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$;

(iii) famille de vecteurs $\big((1,2,3),(1,1,0)\big)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ avec la base $\mathscr{B}=\big((1,0,0),(1,1,1),(1,1,0)\big)$;

(iv) vecteur $P=1+X+X^4$ dans l'espace $\mathbb{R}_4[X]$ avec la base canonique $\mathscr{B}$;

(v) vecteur $Q=1+X$ dans l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ avec la base $\mathscr{B}=\big(X(X-1),X(X+1),X^2-1\big)$;

(vi) vecteur $A=(X-1)^n$ dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ avec la base canonique $\mathscr{B}$ où $n\in\mathbb{N}^*$;

(vii) vecteur $M=\begin{pmatrix}1&1\\ \pi&1/2\end{pmatrix}$ dans l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec la base canonique $\mathscr{B}$;

(viii) famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},I_2\right)$ dans l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec la base

$$\mathscr{B}=\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right);$$

(ix) vecteur exp dans l'espace $\mathrm{Vect}(\mathrm{sh},\mathrm{ch})$ avec la base $\mathscr{B}=(\mathrm{sh},\mathrm{ch})$.

Exemple 2

Soit a,b,c des réels. Dans chaque cas, déterminer la matrice de la base $\mathscr{E}$ vers la base $\mathscr{F}$ de l'application linéaire considérée (les linéarité et bases ont été prouvés dans les chapitres 15 et 16).

(i)

$$\varphi_1:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\(x,y)&\mapsto&(2x+y,y)\end{array}\quad\text{et } \mathscr{E}=\mathscr{F} \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^2;$$

(ii)

$$\varphi_1:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\(x,y)&\mapsto&(2x+y,y)\end{array}\quad\text{et } \mathscr{E} \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathscr{F}=\big((1,0),(1,1)\big);$$

(iii)

$$\varphi_2:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\longrightarrow&\mathbb{R}\\(x,y,z)&\mapsto&x+y-z\end{array}\quad\text{et } \mathscr{E}=\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big), \mathscr{F} \text{ est la base canonique de } \mathbb{R};$$

(iv)

$$\varphi_3:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}_3[X]&\longrightarrow&\mathbb{C}_3[X]\\P&\mapsto&P'\end{array}\quad\text{et } \mathscr{E}=\mathscr{F} \text{ est la base canonique de } \mathbb{C}_3[X];$$

(v)

$$\varphi_6:\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_2(\mathbb{K})&\longrightarrow&\mathscr{M}_2(\mathbb{K})\\M&\mapsto&M^{\mathrm{T}}\end{array}\quad\text{et } \mathscr{E}=\mathscr{F} \text{ est la base canonique de } \mathscr{M}_2(\mathbb{K});$$

(vi)

$$\psi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\P&\mapsto&\big(P(a),P(b),P(c)\big)\end{array}\quad\text{et } \mathscr{E},\mathscr{F} \text{ sont les bases canoniques respectives de } \mathbb{R}_2[X] \text{ et } \mathbb{R}^3.$$

Exemple 3

Calculer, de façon matricielle, l'image de $(1,2,1)$ par φ_1 et de $1+2X+X^2$ par ψ avec les notations de l'exemple précédent.

Exemple 4

On admet que l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) \end{array}$$

est linéaire. Écrire la matrice de cette matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et montrer que f est un projecteur.

Exemple 5

Montrer que l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

est un isomorphisme et déterminer φ^{-1} de façon matricielle (on admettra que cette application est linéaire).

Exemple 6

Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$ dans les cas suivants :

(i) $\mathscr{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{E}' = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$;

(ii) $\mathscr{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathscr{E}' = \big((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,2),(1,0,4,0)\big)$;

(iii) $\mathscr{E}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{E} = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$;

(iv) $\mathscr{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{E}' = \big(X(X-1), X(X+1), X^2-1\big)$.

Exemple 7

Soit a,b,c des réels. Dans chaque cas, déterminer la matrice de la base $\mathscr{E}'$ vers la base $\mathscr{F}'$ de l'application linéaire considérée. On effectuera des changements de base.

(i)

$$\varphi_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y,y) \end{array} \quad \text{et } \mathscr{E}' = \mathscr{F}' = \big((1,0),(1,1)\big);$$

(ii)

$$\psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(-1),P(1),P(0)\big) \end{array}$$

et

$$\mathscr{E}' = \big(X(X-1), X(X+1), X^2-1\big), \mathscr{F}' = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big).$$

Exemple 8

Déterminer une base du noyau, de l'image ainsi qu'un expression de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 9

SOit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer si les matrices A, B sont inversibles et leurs inverses éventuels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$