Exemple 1

Déterminer dans chaque cas si l'ensemble V est un espace vectoriel et, si oui, le démontrer :

(i) $V = \left\{(x,x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=1 \text{ et } 2x+2y=0\right\}$;

(ii) $V = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;

(iii) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\right\}$;

(iv) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$;

(v) $V = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$;

(vi) $V = \left\{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P'(0)=0\right\}$;

(vii) V est l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$;

(viii) V est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ valant 1 en 0 ;

(ix) V est l'ensemble des matrices symétriques ;

(x) $V = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2}-u_n=0\right\}$.

Exemple 2

Montrer que

$$V = \left\{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P'(0)=0 \text{ et } P(1)=0\right\}$$

est un espace vectoriel en l'écrivant comme une intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[X]$.

Exemple 3

Montrer dans chaque cas que l'ensemble V est un espace vectoriel :

(i) V est l'ensemble des solutions du système d'inconnues $x,y,z \in \mathbb{R}$ $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right.$;

(ii) V est l'ensemble des polynômes à coefficients réel de degré inférieur à 3.

(iii) V est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''=y$.

Exemple 4

Déterminer dans chaque cas une famille finie de vecteurs qui engendrent les espaces vectoriels V :

(i) V est l'ensemble des solutions du système d'inconnues $x,y,z \in \mathbb{R}$ $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right.$;

(ii) V est l'ensemble des polynômes à coefficients réel de degré inférieur à 3 ;

(iii) L'espace V est :

$$V = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(1)=0\}$$

Exemple 5

Justifier que

$$\{(x,x+y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big) + \mathrm{Vect}\big((1,2)\big).$$

Exemple 6

(i) Montrer que :
$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Vect}\big((1,0,0)\big) \oplus \operatorname{Vect}\big((0,1,0),(0,0,1)\big)$$

(ii) Montrer que
$$\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}(1) \oplus \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}.$$

(iii) Déterminer un espace vectoriel G tel que
$$\{(x,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\big((1,1,0)\big) \oplus G.$$

Exemple 7

(i) Montrer que :
$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$
est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Montrer que $(\sin,\cos)$ est une famille génératrice de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ qu'on notera V.

(iii) Montrer que (X, X^2) est une famille génératrice de $V = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\}$.

Exemple 8

Montrer que :
$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$
est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 9

Montrer dans chaque cas que la famille $\mathscr{F}$ est libre ou liée dans l'espace E considéré :

(i) $\mathscr{F} = ((1,0,0),(1,1,1))$ et $E = \mathbb{R}^3$;

(ii) $\mathscr{F} = ((1,0,0),(1,1,1),(0,1,1))$ et $E = \mathbb{R}^3$;

(iii) $\mathscr{F} = (1+X, X, X^5)$ et $E = \mathbb{C}[X]$;

(iv) $\mathscr{F} = (1+X, X, X^5, X^5-1)$ et $E = \mathbb{C}[X]$;

(v) $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, I_2\right)$ et $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$;

(vi) $\mathscr{F} = (\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;

(vii) $\mathscr{F} = (\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \exp)$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exemple 10

Justifier que $(1+X, X)$ et $(1+X, X, X^5, X^7)$ sont libres dans $\mathbb{C}[X]$.

Exemple 11

Montrer qu'il est possible de compléter puis compléter la famille :

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}\right)$$

en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 12

Déterminer une base de l'espace :

$$V = \mathrm{Vect}(1, 1+X, 1+X^2, 1+X+X^2).$$

Exemple 13

Montrer dans chaque cas que la famille $\mathscr{F}$ est une base de l'espace E considéré :

(i) $\mathscr{F} = ((1,0,0),(1,1,1),(1,2,1))$ et $E = \mathbb{R}^3$;

(ii) $\mathscr{F} = (X(X-1), X(X+1), X^2-1)$ et $E = \mathbb{R}_2[X]$;

(iii) $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ et $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemple 14

(i) Déterminer une base d'un supplémentaire de :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}.$$

(ii) Montrer que $V = \mathrm{Vect}(1, X)$ et $W = \mathrm{Vect}(1+X+X^2)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.