Exemple 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n)$$

Justifier que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

Exemple 2

Pour tout entier naturel n on pose

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.

Exemple 3

Calculer la dérivée à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ du polynôme $P(X) = X(X+1)^n$

Exemple 4

Calculer le reste de la division euclidienne de

(i) $X^4 - 2X + 1$ par $X - 1$;

(ii) $X^8 - X^4 + 1$ par $X^2 + 1$.

Exemple 5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $X - 1$ divise $1 - X^n$.

Exemple 6

(i) Montrer que $X + 1 \mid X^{27} + 1$.

(ii) Montrer que pour tout $n, p, q \in \mathbb{N}$,

$$X^2 + X + 1 \mid X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}.$$

Exemple 7

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1$ mais que X^3 ne divise pas $(X+1)^n - nX - 1$.

Exemple 8

Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes

(i) $X^4 + X^2 + 1$;

(ii) $X^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Exemple 9

Justifier que $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.

Exemple 10

Factoriser, dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes

(i) $X^4 + X^2 + 1$;

(ii) $X^{2n} - 1$, ($n \in \mathbb{N}$).

Exemple 11

Déterminer tous les nombres complexes x, y vérifiant $xy = 1$ $x + y = 1$.