Exemple 1

Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $x^2 = 4$;

(ii) $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$.

Exemple 2

(i) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. Dans quel cas cette inégalité est-elle une égalité ?

(ii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$.

Exemple 3

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|x+1| \leq |x|$.

Exemple 4

On considère $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto x+1$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des fonctions différentes.

Exemple 5

Déterminer les domaines de définitions des fonctions :

(i) $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, exp, ln, cos, sin et $\sqrt{\ }$;

(ii) $f : x \mapsto \ln(x^2-1)$;

(iii) $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

Exemple 6

Déterminer les domaines de définition de $f : x \mapsto \ln(x^2)$ et de $x \mapsto 2\ln(x)$. Sur quel ensemble ces deux fonctions coïncident-elles ? Ces deux fonctions sont-elles égales ?

Exemple 7

Tracer une allure des courbes des fonctions :

(i) exp et ln ;

(ii) $x \mapsto \sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}$;

(iii) $f : x \mapsto \frac{x^2+x}{x+1}$ (on déterminera une asymptote en $+\infty$).

Exemple 8

Déterminer les parités des fonctions :

(i) cos, sin ;

(ii) $f : x \mapsto x^k$ où $k \in \mathbb{Z}$;

(iii) $g : x \mapsto e^{-x^2}$.

Exemple 9

Sur quel ensemble doit-on étudier la fonction tan (appelée fonction tangente) définie, pour les réels x pour lesquels cela est possible, par

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pour tracer une allure de sa courbe ?

Exemple 10

Déterminer les monotonies sur leur domaine de définition des fonctions :

(i) exp et ln ;

(ii) $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$;

(iii) cos.

Exemple 11

Justifier que :

(i) exp est minorée mais non majorée sur $\mathbb{R}$;

(ii) cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$;

(iii) ln n'est ni minorée, ni majorée sur son domaine de définition.

Exemple 12

Déterminer les limites des fonctions aux points précisés :

(i) $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$, exp, $\sqrt{\ }$, cos, sin en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que ln en $+\infty$;

(ii) $f : x \mapsto e^x + x$ en $+\infty$ et $-\infty$;

(iii) $g_1 : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, $g_2 : x \mapsto \frac{e^x}{x}$, $g_3 : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $g_4 : x \mapsto \frac{e^x}{x^{1000}}$ en $+\infty$;

(iv) $h_1 : x \mapsto x^3 - x$, $h_2 : x \mapsto \ln x - x$ en $+\infty$;

(v) $\varphi_1 : x \mapsto xe^{-x}$ en $+\infty$, $\varphi_2 : x \mapsto \frac{x^3-x}{4x^3+x}$ en $+\infty$ et en 0 ;

(vi) $\psi : x \mapsto x^x$ en 0^+.

Exemple 13

Justifier que :

(i) cos est décroissante au voisinage de $\frac{\pi}{2}$;

(ii) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est positive au voisinage de $+\infty$.

Exemple 14

Déterminer les limites de

(i) ln en 0^+ ;

(ii) $x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0^+ et 0^- ;

(iii) $x \mapsto x \ln x$ en 0^+ et $x \mapsto \sqrt{x} \ln x$ en 0^+.

Exemple 15

Déterminer les limites de :

(i) $x \mapsto \exp(-x^2)$ en $+\infty$ et en $-\infty$;

(ii) $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.

Exemple 16

Déterminer la limite de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ en $+\infty$.

Exemple 17

Déterminer la limite de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ en 0^+ et 0^-.

Exemple 18

Déterminer les ensembles sur lesquels les fonctions $x \mapsto x^k$ où $k \in \mathbb{Z}$, exp, ln, $\sqrt{}$, cos, sin sont continues.

Exemple 19

Déterminer le domaine sur lequel $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2-x}$ est continue.

Exemple 20

Déterminer les domaines sur lesquels $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{\ln x}$ sont continues.

Exemple 21

Montrer que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $e^x + x = -1$ possède au moins une solution. Cette solution est-elle unique ?

Exemple 22

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle en 0.

Exemple 23

Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$. Déterminer les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions $f : x \mapsto ax^2+bx+c$, $g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\varphi : x \mapsto h(x) - xh(0) + h'(0)$ où h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 24

Déterminer les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions $f : x \mapsto (x+2)^3$, $g : x \mapsto e^{-x^2}$.

Exemple 25

Déterminer les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions $f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$, $g : t \mapsto \cos(\omega t + \phi)$ où $\omega, \varphi \in \mathbb{R}$, $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Exemple 26

Déterminer la dérivée n-ième de la fonction cos sur $\mathbb{R}$.

Exemple 27

Donner un exemple d'application :

(i) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; (ii) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$; (iii) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple 28

Déterminer dans chaque cas si l'application est bijective ou non.

(i)

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

(ii)

$$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

(iii)

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Exemple 29

(i) Déterminer l'image de l'application

$$f : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

(ii) Justifier que ln réalise une bijection de son domaine de définition vers son image qu'on déterminera. Quelle est son application réciproque ?

(iii) Justifier que $g : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un ensemble qu'on déterminera. Déterminer une expression de son application réciproque notée g^{-1}.

Exemple 30

Justifier que $f : x \mapsto x^2$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un ensemble qu'on déterminera. On note f^{-1} son application réciproque. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de f^{-1}.