PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante à l'intérieur de chaque exercice.

Durée : 3h

Calculatrice interdite

Bon courage !

Vous laisserez une marge en haut sur la première page pour les annotations.
Cet énoncé comporte 3 exercices indépendants.

Questions de cours

1. Donner les dim
2. Que doit valoir $p \circ p$ pour qu'un endomorphisme p d'un espace vectoriel soit un projecteur.
3. Énoncer le théorème du rang.
4. Énoncer la formule de Grassmann.

Exercice 1 : Polynômes de Lagrange

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels distincts. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$L_0(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad L_1(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} \quad \text{et} \quad L_2(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

On notera également $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $L_i(a)$, $L_i(b)$ et $L_i(c)$ pour $i = 0, 1, 2$.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = (L_0, L_1, L_2)$ est une famille libre.
3. Justifier que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & \big(P(a), P(b), P(c)\big) \end{array}.$$

4. Montrer que φ est une application linéaire.
5. Montrer que φ est injective.
6. En déduire que φ est un isomorphisme. On notera φ^{-1} son application réciproque.
7. Exprimer $\varphi^{-1}\big((1,0,0)\big)$, $\varphi^{-1}\big((0,1,0)\big)$ et $\varphi^{-1}\big((0,0,1)\big)$ en fonction de L_0, L_1, L_2 pour en déduire une expression, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, de
$$\varphi^{-1}\big((x,y,z)\big)$$
en fonction de L_0, L_1, L_2 et x, y, z.
8. Déterminer les expressions des matrices $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi)$ de φ de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$ ainsi que la matrice $A' = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(\varphi)$ de φ de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{C}$.
9. Justifier que A et A' sont inversibles, déterminer l'inverse de A' et montrer que
$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)} \begin{pmatrix} b^2c - c^2b & c^2a - a^2c & a^2b - b^2a \\ c^2 - b^2 & a^2 - c^2 & b^2 - a^2 \\ b - c & c - a & a - b \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Supplémentaires communs de $\mathbb{R}^3$

Le but de l'exercice est de montrer dans un cadre général que si V et W sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de même dimension, il existe un sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus F \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^3 = W \oplus F.$$

Dans ce cas, on dira que V et W admettent un supplémentaire commun F.

Partie I : Un cas avec deux plans

On considère les espaces

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = 0\right\} \quad \text{et} \quad W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\right\}.$$

1. Montrer que V est un espace vectoriel.
2. Justifier que $\big((-1,1,0),(1,0,1)\big)$ est une base de V. Quelle est la dimension de V ?
3. On pose $F=\mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$. Montrer que $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x=y=z\big\}$.
4. Déterminer $F\cap V$.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3=V\oplus F$.
6. Montrer également (on pourra donner les arguments principaux) $\mathbb{R}^3=W\oplus F$.

Partie II : Cas général
Dans toute cette partie V et W sont des sous espaces vectoriels quelconques de $\mathbb{R}^3$ de même dimension notée p.

8. Justifier que si $p\in\{0,3\}$, V et W admettent un supplémentaire commun F.
9. Justifier que si $V=W$, il existe un sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathbb{R}^3=V\oplus F\quad\text{et}\quad\mathbb{R}^3=W\oplus F.$$

   Dans la suite on supposera que $V\neq W$. On traitera les cas $p=0$ et $p=3$ séparément.
10. On suppose dans cette question et la suivante que $p=2$. Justifier qu'il existe un vecteur $u\in\mathbb{R}^3$ tel que $x\notin V\cup W$.
11. On pose $F=\mathrm{Vect}(u)$. Montrer que $V\cap F=W\cap F=\{(0,0,0)\}$. En déduire que V et W admettent un supplémentaire commun F.
12. On suppose dans cette question et les trois suivantes que $p=1$. Justifier qu'il existe des vecteurs $u,v\in\mathbb{R}^3$ tel que $u\notin V\setminus W$ et $v\notin W\setminus V$.
13. Montrer que $u+v\notin V\cup W$ puis, en posant $F'=\mathrm{Vect}(u+v)$, déterminer $V\cap F'$ et $W\cap F'$.
14. On pose $V'=V\oplus F$ et $W'=W\oplus F$. Montrer qu'il existe un sous espace vectoriel F'' de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathbb{R}^3=V'\oplus F''\quad\text{et}\quad\mathbb{R}^3=W'\oplus F''.$$

15. Montrer que V et W admettent un supplémentaire commun F.
16. Conclure l'exercice.

Exercice 3 : Une condition pour qu'un endomorphisme soit un projecteur (adapté exercice oral CCP/e3a)

Partie I : Condition sur un exemple
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'application

$$p:\quad \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\dfrac{2x-y-z}{3},\dfrac{-x+2y-z}{3},\dfrac{-x-y+2z}{3}\right)\end{array}.$$

On note $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,-1,0)$ et $e_3=(0,1,-1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de p de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}$ notée $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(p)$.
4. Déterminer une base puis la dimension du noyau de p. En déduire le rang de p.
5. Déterminer une base puis la dimension du noyau de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}-p$ (on peut commencer par calculer, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}-p)\big((x,y,z)\big)$).
6. Déduire des deux questions précédentes que $\mathrm{rg}(p)+\mathrm{rg}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}-p)=3$.

Partie II : Condition générale
Dans toute cette partie, f est un endomorphisme **quelconque** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$.

7. Montrer que f est un projecteur de E si et seulement si $\mathrm{Id}_E - f$ est un projecteur de E (on pourra développer la quantité $(\mathrm{Id}_E - f)^2$ de manière précise).
8. Montrer que si f est un projecteur de E alors

$$\ker(f) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f).$$

   On pourra procéder par double inclusion ou directement.
9. On pose $V = \mathrm{Im}(f)$ et $W = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)$. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(\mathrm{Id}_E - f) = n$ alors $E = V \oplus W$.
10. Conclure que f est un projecteur de E si et seulement si

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(\mathrm{Id}_E - f) = n.$$
