PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante à l'intérieur de chaque exercice/problème.

La calculatrice est interdite. Durée : 4h.

Bon courage !

Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Questions de cours

1. Donner trois espaces vectoriels.
2. Si E est un espace vectoriel, quel vecteur est commun à tous les sous-espaces vectoriels de E ?
3. Que dire d'un polynôme de degré au plus n qui a au moins $n+1$ racines distinctes ?

Exercice 1 : Un plan

On considère l'espace
$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\right\}.$$

1. Montrer que V est un espace vectoriel.
2. Montrer que $(-1,1,0),(0,1,-1) \in V$.
3. Déduire de la question précédente que $\mathrm{Vect}\big((-1,1,0),(0,1,-1)\big) \subset V$.
4. Montrer également que $V \subset \mathrm{Vect}\big((-1,1,0),(0,1,-1)\big)$.
5. Montrer que
$$V = \mathrm{Vect}\big((-1,1,0)\big) \oplus \mathrm{Vect}\big((0,1,-1)\big).$$

Exercice 2 : Une étude locale de fonction

On considère la fonction
$$F : x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

1. Justifier que la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que F' est du même signe que $h : x \mapsto x\cos x - \sin x$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer un développement limité de la fonction F en 0 à l'ordre 2.
4. Montrer que F est prolongeable par continuité en 0 (on précisera par quelle valeur). Dans la suite, on notera à nouveau F son prolongement.
5. Montrer que F est dérivable en 0 et donner une équation de sa tangente en 0.
6. Étudier la position de la courbe représentative de F par rapport à sa tangente en 0 au voisinage de 0.

Exercice 3 : Polynômes de Tchebytchev (adapté concours CCP/e3a)

On définit une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ par : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Expliciter T_2, T_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n en effectuant une récurrence forte.
3. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, a_n le coefficient dominant de T_n. Que valent a_0, a_1 ? Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 2a_n$ puis déterminer l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$
On effectuera une nouvelle récurrence forte.
6. Montrer, avec la question précédente, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$T_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad T_n(-1) = (-1)^n.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $U_n \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme vérifiant, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $U_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$ alors $U_n = T_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.

8. Que vaut, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$?
9. Justifier que cos est une bijection de $[0,\pi]$ sur un intervalle qu'on déterminera. En déduire que $x_1,\dots,x_n$ sont distincts.
10. Calculer, avec la question 5, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $T_n(x_k)$ et en déduire que
$$T_n(X) = 2^{n-1}(X-x_1)\times\cdots\times(X-x_n).$$
11. En dérivant la relation de la question 5, montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\sin^2(\theta)\,T_n''\big(\cos(\theta)\big) - \cos(\theta)\,T_n'\big(\cos(\theta)\big) = -n^2 T_n\big(\cos(\theta)\big)$$
puis que
$$(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0.$$

Problème 1 : *Équation différentielle et suite implicite (adapté concours première année PCSI/PTSI)*

Partie I : Fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} \quad \text{où} \quad \mathrm{ch}\,x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}\,x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

1. Justifier que th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée (on simplifiera au maximum l'expression). Déterminer également la parité de th.
2. Déterminer les variations de th, et calculer les limites de th en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Calculer $\mathrm{th}(0)$ puis déterminer le signe de la fonction th sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$,
$$\mathrm{th}(x) < x.$$
On pourra faire une étude de fonction et justifier que $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Un prolongement de fonction

On définit la fonction f, définie pour $x \in \mathbb{R}^*$, par :
$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}\,x}{x}.$$

5. Montrer que f est paire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$f'(x) = \frac{\mathrm{ch}\,x}{x^2}\left[x - \mathrm{th}\,x\right].$$
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction f en 0 (on utilisera notamment un développement limité de la fonction sh que l'on calculera).
7. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On notera à nouveau f ce prolongement.
8. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f.
9. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
10. Dresser le tableau des variations de f.

Partie III : Une équation différentielle

On souhaite déterminer toutes les fonctions y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$xy'(x) + y(x) = \mathrm{ch}(x). \tag{E}$$

11. Montrer que si y est une solution de (E), alors $y(0) = 1$.
12. Montrer que f est une solution de (E) (ainsi, f est une solution particulière de (E)).
13. En résolvant l'équation différentielle homogène (E) sur $\mathbb{R}^{+,*}$, montrer que si y est une solution de (E) alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$y(x) = \frac{C}{x} + f(x).$$

14. Justifier, avec la question 11, que, dans la question précédente, $C = 0$.
15. Conclure que f est l'unique solution de (E).

Partie IV : Une suite implicite

16. Justifier que f réalise un bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle qu'on déterminera. On note g sa bijection réciproque. Déterminer la monotonie de g.
17. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = g\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

    Que vaut, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n)$?
18. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
19. Justifier que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
20. Déterminer un équivalent de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
