Corrigé DS 6

Exercice 1 : Série harmonique

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. La fonction ln est continue sur $[k-1,k]$ et dérivable sur $]k-1,k[$ donc, par l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]k-1,k[$ tel que
$$\frac{\ln k - \ln(k-1)}{(k-(k-1))} = \ln' c = \frac{1}{c} > \frac{1}{k}$$
où la dernière inégalité vient de la décroissance stricte de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant les inégalités précédentes
$$u_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{np} (\ln k - \ln(k-1)) = \ln(np) - \ln n = \ln p.$$
3. De façon analogue à la question 1, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $c \in]k,k+1[$ tel que
$$\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c} < \frac{1}{k}$$
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant les inégalités précédentes
$$u_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{np} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(np+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{pn+1}{n+1}\right).$$
4. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln\left(\frac{pn+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln p.$$
Or, par composition, $\ln\left(\frac{pn+1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln p$, donc, par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln p$.

Exercice 2 : Accélération de convergence

1. Comme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $x \mapsto x-1$ s'annule uniquement en 1, φ est définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$.
2. On a
$$\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$
donc φ admet pour limite 1 en 1. Par suite, φ est prolongeable par continuité sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(1) = 1$.
4. On a, pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$,
$$e^{\varphi(x+1)} = e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$
donc f est définie sur $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.
5. Par quotient, $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ donc, comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
6. On a
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
donc
$$\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

7. On a
$$e^y \underset{y\to 0}{=} 1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$$
ce qui donne, comme $x\mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}-1$ tend vers 0 en 0, par composition,
$$\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Tronc}_2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2\right)+o(x^2) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$
Finalement, on obtient le développement limité
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} e\times\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right) \underset{x\to 0}{=} e-e\frac{x}{2}+e\frac{11}{24}x^2+o(x^2).$$
8. On a donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} e$ donc f tend vers e en 0.
9. La fonction f admet un développement limité à l'ordre au moins 1 en 0 donc elle est dérivable en 0 et on a $f'(0)=-\frac{e}{2}$.
10. Avec le développement limité, on obtient
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} e-e\frac{x}{2}+o(x)$$
donc
$$f(x)-e \underset{x\to 0}{\sim} -e\frac{x}{2}.$$
11. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e$, par composition,
$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$$
et on a, avec la question précédente,
$$u_n - e \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e}{2n}.$$
12. On a, par opération sur les développements limités,
$$2f\left(\frac{x}{2}\right)-f(x) \underset{x\to 0}{=} 2e-2e\frac{x}{4}-2e\frac{11}{24}(x/2)^2-e+e\frac{x}{2}-e\frac{11}{24}x^2+o(x^2)$$
ce qui donne
$$2f\left(\frac{x}{2}\right)-f(x) \underset{x\to 0}{=} -e\frac{11}{48}x^2+o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -e\frac{11}{48}x^2.$$
Ainsi,
$$v_n = 2f\left(\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{11e}{48n^2}.$$
La suite (v_n) converge plus vite vers e que la suite (u_n).

Exercice 3 : Une équation fonctionnelle

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f, définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient pour tout réel x :

$$f(ax+b) = f(x). \tag{E}$$

1. Si f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, celle-ci est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(y)$ ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = ax+b$, $f(ax+b) = f(x)$. Ainsi, les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sur des éléménets de $\mathscr{E}$.
2. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$.
   Pour $n = 0$, on a $f(u_0) = f(x)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$. On a
   $$f(u_{n+1}) = f(au_n + b) = f(u_n) = f(u_0) = f(x)$$
   ce qui achève la récurrence.
   En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - r$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - r = au_n + b - \frac{b}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = a(u_n - r) = av_n.$$
   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a^n v_0$ ce qui donne
   $$u_n - r = a^n(u_0 - r)$$
   puis
   $$u_n = a^n(u_0 - r) + r.$$
4. Comme $|a| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$ donc, par somme, (u_n) est convergente et
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \times (u_0 - r) + r = r.$$
5. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et que la suite (u_n) est convergente de limite r, on a
   $$f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(r) = f\left(\frac{b}{1-a}\right).$$
6. Posons $C = f(r)$. On a montré dans les question précédentes que pour pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) = f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(r) = C$$
   donc f est constante sur $\mathbb{R}$.
7. Lorsque $a = 1$, les solutions de (E) sont les fonctions définies, continues et b-périodiques sur $\mathbb{R}$.
8. Lorsque $|a| < 1$, ceci est traité précédemment. Supposons que $|a| > 1$. On, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) = f\left(a\frac{1}{a}x - a\frac{b}{a} + b\right) = f(x)$$
   donc, en posant $a' = 1/a$ et $b' = -b/a$, on a, $|a'| < 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(a'x + b') = f(x)$ donc, avec les questions précédentes, f est constante. Dans tous les cas, f est constante.