PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante à l'intérieur de chaque exercice.

La calculatrice est interdite. Durée : 2h.

Bon courage !

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 4 exercices indépendants.

Questions de cours

1. Énoncer avec précision l'égalité des accroissements finis.
2. Donner les développement limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions exponentielle et $x \mapsto \ln(1+x)$.
3. Donner une fonction strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais dont la dérivée n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 : Série harmonique

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, il existe $c \in]k-1, k[$ tel que
$$\ln k - \ln(k-1) = \frac{1}{c} > \frac{1}{k}.$$
On pourra appliquer l'égalité des accroissements finis.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \ln p$.
3. Montrer de façon analogue que $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln\left(\frac{pn+1}{n+1}\right) \leq u_n.$$
4. Montrer finalement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $\ln p$.

Exercice 2 : Accélération de convergence

On considère la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de φ.
2. Justifier que φ est prolongeable par continuité sur $]0, +\infty[$. On notera à nouveau φ la fonction ainsi prolongée.

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

4. Justifier que $f : x \mapsto e^{\varphi(x+1)}$. En déduire le domaine de définition de f.
5. Justifier que f est dérivable sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
6. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de
$$x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} - 1.$$
7. Justifier que
$$f(x) = e - e\frac{x}{2} + e\frac{11}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
8. En déduire la limite de la fonction f en 0. On prolonge f par cette valeur en 0.
9. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
10. Déterminer un équivalent de $f(x) - e$ lorsque x tend vers 0.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

11. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e et donner un équivalent de la suite $(u_n - e)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2u_{2n} - u_n$.

12. Montrer que $v_n - e \sim -\dfrac{11e}{48n^2}$. Quel est l'intérêt de cette suite ?

Exercice 3 : Une équation fonctionnelle (adapté de concours ENAC)

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f, définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient pour tout réel x :

$$f(ax+b) = f(x). \tag{E}$$

1. Montrer que les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sont des éléments de $\mathscr{E}$.

On considère réciproquement une fonction $f \in \mathscr{E}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = a\,u_n + b$$

et on pose $r = \dfrac{b}{1-a}$.

2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = a^n\,(u_0 - r) + r.$$
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r.
5. Justifier que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\frac{b}{1-a})$.
6. Conclure que f est constante.

Dans la suite, on conserve les hypothèses pour l'ensemble $\mathscr{E}$ mais on suppose que $|a| \geq 1$.

7. Si $a = 1$ et que $b \neq 0$, quel nom donne-t-on aux fonctions satisfaisant l'équation (E) ?
8. Si $|a| \neq 1$ et que $f \in \mathscr{E}$ montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $f(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}) = f(x)$ puis conclure avec la partie précédente que f est constante.

Exercice 4 : Théorème de Darboux

Soit a,b deux réels avec $a < b$ et f une fonction dérivable sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sans que f' soit supposée continue c'est-à-dire que pour tout réel $y \in [f'(a), f'(b)]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = y$. On pose

$$\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

1. Dans les quatre questions suivantes, on considère $y \in [f'(a), \alpha]$ et $\varphi : x \mapsto f(x) - y(x-a)$. Montrer que φ est dérivable sur $[a,b]$. Déterminer le signe de $\varphi'(a)$ puis en déduire qu'il existe $u \in]a,b]$ tel que $f(u) < f(a)$.
2. Montrer que $\varphi(b) > f(a)$.
3. Montrer qu'il existe $x \in]u,b[$ tel que $\varphi(x) = f(a)$.
4. En déduire qu'il existe $c \in]a,x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Que vaut $f'(c)$?
5. Conclure l'exercice.
