Corrigé DS 5

Exercice 1 : Une matrice à paramètre

1. On a
$$A_1 \underset{L}{\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_3\leftrightarrow L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
qui est échelonnée et possède trois pivots donc A_1 est inversible. On a
$$(A_1 \mid I_3) \underset{L}{\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_3\leftrightarrow L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\overset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
donc
$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. On a
$$A_m \underset{L}{\overset{L_2\leftarrow L_2-mL_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1-m^2 & m \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_2\leftarrow L_2+mL_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3-mL_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1-2m^2 \end{pmatrix}$$
qui est une matrice échelonnée.

3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, la matrice A_m est équivalente à une matrice triangulaire supérieure ayant pour coefficients diagonaux 1, 1 et $1-2m^2$ donc A_m est inversible si et seulement si $1-2m^2 \neq 0$ c'est-à-dire $m \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $m \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. On a
$$A_m^2 = \begin{pmatrix} m^2+1 & 2m & m^2 \\ 2m & 2m^2+1 & 2m \\ m^2 & 2m & m^2+1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_m^3 = \begin{pmatrix} 3m^2+1 & 2m^3+3m & 3m^2 \\ 2m^3+3m & 6m^2+1 & 2m^3+3m \\ 3m^2 & 2m^3+3m & 3m^2+1 \end{pmatrix}.$$

5. On a, pour tout $m \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} & -A_m^3 + 3A_m^2 + (2m^2-3)A_m + (1-2m^2)I_3 \\ &= \begin{pmatrix} -3m^2-1 & -2m^3-3m & -3m^2 \\ -2m^3-3m & -6m^2-1 & -2m^3-3m \\ -3m^2 & -2m^3-3m & -3m^2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3m^2+3 & 6m & 3m^2 \\ 6m & 6m^2+3 & 6m \\ 3m^2 & 6m & 3m^2+3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 2m^2-3 & 2m^3-3m & 0 \\ 2m^3-3m & 2m^2-3 & 2m^3-3m \\ 0 & 2m^3-3m & 2m^2-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2m^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Soit $m \in \mathbb{R}$. On suppose que $(1-2m^2) \neq 0$. On a la factorisation
$$A_m \left(-\frac{1}{2m^2-1} \left[A_m^2 - 3A_m + (3-2m^2)I_3 \right] \right) = \frac{1}{2m^2-1} \left(-A_m^3 + 3A_m^2 + (2m^2-3)A_m \right) = \frac{1}{2m^2-1}(2m^2-1)I_3 = I_3.$$
Ainsi, A_m est inversible et
$$A_m^{-1} = -\frac{1}{2m^2-1} \left[A_m^2 - 3A_m + (3-2m^2)I_3 \right].$$

7. Soit $m \in \mathbb{R}$. On suppose que $(1-2m^2) \neq 0$. Par le calcul, on obtient

$$A_m^2 - 3A_3 + (3-2m^2)I_3 = \begin{pmatrix} 1-m^2 & -m & m^2 \\ -m & 1 & -m \\ m^2 & -m & 1-m^2 \end{pmatrix}$$

qui donne

$$A_m^{-1} = \frac{1}{1-2m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & -m & m^2 \\ -m & 1 & -m \\ m^2 & -m & 1-m^2 \end{pmatrix}$$

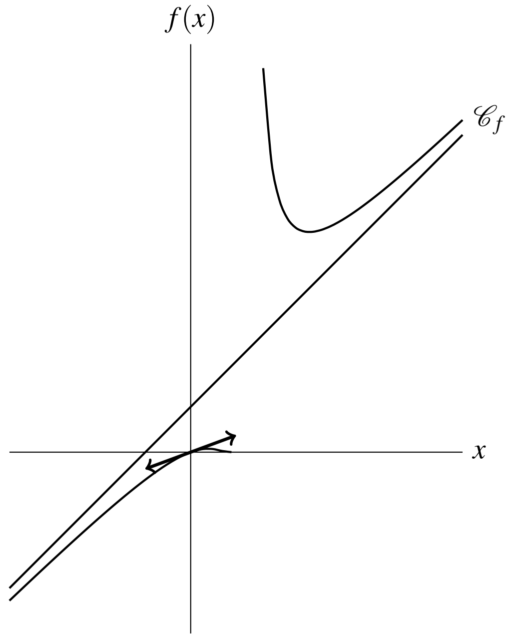
Exercice 2 : Une étude de fonction

1. Comme exp est définie sur $\mathbb{R}$, f est définie lorsque le dénominateur de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ ne s'annule pas. Ainsi, f est définie sur $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que le dénominateur de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ ne s'annule pas sur $\mathscr{D}(f)$, par composition, f est dérivable sur $\mathscr{D}(f)$ et on a, pour tout $x \in \mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) + x\frac{-1}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = [(x-1)^2 - x]\frac{\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)}{(x-1)^2}$$
puis
$$f'(x) = [(x-1)^2 - x]\frac{\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)}{(x-1)^2} = \varphi(x)\frac{\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)}{(x-1)^2}$$
où on pose $\varphi\colon x \mapsto x^2 - 3x + 1$.
3. La fonction φ est une fonction polynomiale de degré 2 qui a pour racines $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ donc, comme le coefficient devant le monôme de plus haut degré est positif, φ est positive sur $]-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$ et négative sur $[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$.
4. On a, pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$,
$$f(x) = x\exp\left(-1 + \frac{1}{x-1} + 1\right) = \frac{x}{e}\exp\left(\frac{1}{x-1} + 1\right) = \frac{x}{e}\exp\left(\frac{-x}{1-x}\right).$$
5. On a
$$\frac{-x}{1-x} \underset{x\to0}{=} -x(1+x+o(x)) \underset{x\to0}{=} -x - x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad e^y \underset{y\to0}{=} 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$
ce qui donne, comme $x \mapsto \frac{-x}{1-x}$ s'annule en 0, par composition,
$$\exp\left(\frac{-x}{1-x}\right) \underset{x\to0}{=} \mathrm{Tronc}_2\left(1 - x - x^2 + \frac{1}{2}\left(-x-x^2\right)^2\right) + o(x^2) \underset{x\to0}{=} 1 - x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
Finalement, on obtient le développement limité
$$f(x) \underset{x\to0}{=} \frac{x}{e}\left(1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x}{e} - \frac{x^2}{e} - \frac{x^3}{2e} + o(x^3).$$
6. On obtient, avec le développement limité de f en 0 à l'ordre 3,
$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{e} \quad \text{puis} \quad f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0.$$

7. On a
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{e} + o(x)$$
donc la courbe de f admet une tangente en 0 d'équation $y = \frac{x}{e}$. De plus, avec le développement limité de f, on a
$$f(x) - \frac{x}{e} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2e} \leqslant 0$$
donc la courbe représentative de f est en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.
8. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h}\exp\left(\frac{1}{\frac{1}{h}-1}\right) = \frac{\exp\left(\frac{h}{1-h}\right)}{h}.$$
On a
$$\frac{h}{1-h} \underset{x\to 0}{=} h + h^2 + o(h^2) \quad \text{et} \quad e^y \underset{y\to 0}{=} 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$
ce qui donne, comme $h \mapsto \frac{h}{1-h}$ s'annule en 0, par composition,
$$\exp\left(\frac{h}{1-h}\right) \underset{h\to 0}{=} \text{Tronc}_2\left(1+h+h^2+\frac{1}{2}\left(h+h^2\right)^2\right) + o(h^2) \underset{x\to 0}{=} 1+h+h^2+\frac{1}{2}h^2+o(h^2) = 1+h+\frac{3}{2}h^2+o(h^2).$$
Finalement,
$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h} + 1 + \frac{3}{2}h + o(h).$$
9. Compte-tenu du développement limité précédente, on a obtient le développement asymtotique
$$f(x) \underset{h\to\pm\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
puis
$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x.$$
10. Comme
$$f(x) \underset{h\to\pm\infty}{=} x + 1 + o(1)$$
la courbe de f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = x+1$. De plus,
$$f(x) - (x+1) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{2}{3x}$$
donc la courbe de f est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$ et au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
11. Pour compléter le tableau, il manque la limite de f en 1^- et en 1^+. On a $\frac{1}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par opération, $f(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$. De même, $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$. On obtient le tableau, avec le signe de f' qui est donné par le signe de φ,

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0		$-$		0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\searrow$	$0 \parallel +\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a la courbe



Exercice 3 : Une suite récurrente (extrait concours e3a)

1. On a $u_1 = \sqrt{1+u_0}$ et $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{1+u_0}}$.
2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. On a $u_0 \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geqslant 0$. On a, par croissance de la fonction $\sqrt{\ }$,
$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \geqslant 0$$
ce qui achève la récurrence. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et positive.
3. On a, pour tout réel $a \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant (\sqrt{a}-1)^2 = \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}+1$ ce qui s'écrit
$$\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(1+a).$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par croissance de la fonction $\sqrt{\ }$, comme $u_n \geqslant 0$,
$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \geqslant \sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}.$$
On a $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par théorème d'encadrement,
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
5. Avec les questions 1 et 3, on a
$$u_1 \leq \frac{1+u_0}{2} \leq 1+\frac{u_0}{2}$$
puis
$$u_2 \leqslant \sqrt{2+1+\frac{u_0}{2}} \leqslant \frac{1+2+1+\frac{u_0}{2}}{2} \leqslant 2+\frac{u_0}{2^2}.$$
Montrons ainsi par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leqslant n+\frac{u_0}{2^n}.$$
l'autre partie de l'inégalité par récurrence. On a
$$u_0 \leq u_0 = 0+\frac{u_0}{2^0}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$. En appliquant 3 à $a = n+1+u_n$, on obtient

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \frac{1}{2}(1+n+1+u_n)$$

qui donne avec l'hypothèse de récurrence

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(2+n+n+\frac{u_0}{2^n}\right) = n+1+\frac{u_0}{2^{n+1}}$$

et achève la récurrence. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}.$$

À l'aide de l'inégalité précédente, de la question 2 et par croissance de la fonction racine, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$\sqrt{n-1} \leq u_{n-1} \leq \sqrt{n-1+u_{n-2}} \leq \sqrt{n-1+(n-2)+\frac{u_0}{2^{n-2}}} \leq \sqrt{2(n-1)+u_0}$$

qui donne $\leqslant \frac{u_{n-1}}{n} \leq \frac{\sqrt{2(n-1)+u_0}}{n}$. Or

$$\frac{\sqrt{2(n-1)+u_0}}{n} = \sqrt{2\frac{n-1)}{n^2}+\frac{u_0}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc par théorème d'encadrement, $\frac{u_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui s'écrit $u_{n-1} = o(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. On a, pour tout entier n au voisinage de ∞,

$$\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{n+1+u_{n-1}}{n} = \frac{n+1+o(n)}{n} = 1+\frac{1}{n}+o(1) = 1+o(1)$$

donc, par composition avec la fonction $\sqrt{}$,

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

ce qui s'écrit $u_n \sim \sqrt{n}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + \sqrt{n} \geqslant 1 > 0$ donc

$$v_n = u_n - \sqrt{n} = \frac{(u_n-\sqrt{n})(u_n+\sqrt{n})}{u_n+\sqrt{n}} = \frac{u_n^2-n}{u_n+\sqrt{n}} = \frac{u_{n-1}+n^2-n^2}{u_n+\sqrt{n}}$$

ce qui s'écrit

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n+\sqrt{n}}.$$

8. On a, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, $u_n \sim \sqrt{n}$ ce qui s'écrit $u_n = \sqrt{n}+o(\sqrt{n})$ et donne

$$u_n+\sqrt{n} = 2\sqrt{n}+o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}.$$

On obtient, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n+\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

En conclusion, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

9. On a, avec les questions précédentes,

$$u_{n+1}-u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.