PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante à l'intérieur de chaque exercice.

La calculatrice est interdite. Durée : 1h55.

Bon courage !

Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations. Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 3 exercices indépendants.

Questions de cours

1. Donner un critère d'inversibilité pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Donner la définition d'un nombre premier.
3. Donner un équivalent, lorsque x tend vers 0 de $e^x - 1$, $\ln(1+x)$, $\sin(x)$ et $\sqrt{1+x} - 1$.

Exercice 1 : Une matrice à paramètre

On considère la matrice, pour $m \in \mathbb{R}$,

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question (et uniquement cette question), on prend $m = 1$. Montrer que la matrice A_1 est inversible et calculer son inverse.
2. Échelonner, pour $m \in \mathbb{R}$, la matrice A_m (effectuer d'abord $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + mL_3$).
3. En déduire que A_m est inversible si et seulement si $m \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $m \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Calculer, pour $m \in \mathbb{R}$, A_m^2 et A_m^3.
5. Calculer, avec la question précédente, pour $m \in \mathbb{R}$: $-A_m^3 + 3A_m^2 + (2m^2 - 3)A_m + (1 - 2m^2)I_3$.
6. On suppose que $(1 - 2m^2) \neq 0$. Montrer que A_m est inversible et que
$$A_m^{-1} = -\frac{1}{2m^2 - 1}\left[A_m^2 - 3A_m + (3 - 2m^2)I_3\right].$$
7. Établir finalement l'expression de A_m^{-1} lorsque $(1 - 2m^2) \neq 0$.

Exercice 2 : Une étude de fonction

On considère, pour les réels x pour lesquels cela est possible,

$$f(x) = x \times \exp\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f. On notera celui-ci $\mathscr{D}(f)$ dans la suite.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}(f)$ et calculer la dérivée de f qu'on exprimera sous la forme
$$f' : x \mapsto \varphi(x)\frac{\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)}{(x-1)^2}$$
où φ est une fonction à déterminer.
3. Déterminer le signe de φ sur $\mathbb{R}$ (attention, φ n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}$).
4. Justifier que pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$:
$$f(x) = \frac{x}{e}\exp\left(\frac{-x}{1-x}\right).$$
5. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{-x}{1-x}$ et de exp à l'ordre 2 en 0 pour en déduire un développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
6. Déterminer un équivalent simple de f en 0 puis la limite de f en 0.
7. Donner une équation de la tangente en 0 ainsi que la position relative de la courbe de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

8. Montrer que
$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}+1+\frac{3}{2}h+o(h).$$
9. Déterminer des équivalents simples de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
10. Déduire de la question 8 que la courbe de f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on donnera des équations.
11. Dresser le tableau des variations de f et tracer l'allure de la courbe de f en faisant figurer les asymptotes et la tangente en 0.

Exercice 3 : Une suite récurrente (extrait concours e3a)

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$.

1. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de u_0.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et positive (on pourra faire une récurrence).
3. Montrer que pour tout réel $a \geq 0$: $\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(1+a)$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n.$$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Justifier que $u_{n-1} = o(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser la question précédente ainsi que la relation qui définie u_n écrite en fonction de u_{n-1}).
7. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \sqrt{n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n+\sqrt{n}}$$
8. Montrer que $u_n+\sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$ puis établir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
9. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
