Exercice 1 : Équation de Bernoulli

1. La fonction $a : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ est continue sur I. Ainsi a admet une primitive sur I donnée par

$$A\colon x \mapsto -2\ln x.$$

2. Pour tout $x \in I$, $e^{-a(x)} = e^{2\ln x} = x^2$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sur I est donné par

$$\left\{x \in I \mapsto Cx^2 \middle| C \in \mathbb{R}\right\}.$$

On détermine désormais une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = x^3$ sur I par la méthode de la variation de la constante. On considère une solution particulière $y_0 : x\colon \ \mapsto C(x)x^2$. En injectant dans l'équation, on a, pour tout $x \in I$,

$$C'(x)x^2 + C(x) \times 2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x^3$$

qui donne $C'(x) = x$ puis $C(x) = \frac{x^2}{2}$. Ainsi, une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = x^3$ sur I est donnée par

$$y_0\colon x \mapsto \frac{x^4}{2}.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x^3$ sur I est donné par

$$\left\{x \in I \mapsto Cx^2 + \frac{x^4}{2} \middle| C \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. Si y est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\mathscr{P}_0 \begin{cases} y' - \dfrac{2}{x}y = x^3 & \text{sur }]0, +\infty[, \\ y(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Cx^2 + \frac{x^4}{2}$. De plus $\frac{1}{2} = y(1) = C + \frac{1}{2}$ donc $C = 0$. En conclusion, l'unique solution y du problème de Cauchy $\mathscr{P}_0$ est

$$y\colon x \mapsto \frac{x^4}{2}.$$

4. Soit z une solution de $\mathscr{P}$ ne s'annulant pas sur I, on pose $y = \frac{1}{z}$. Comme z est de classe $\mathscr{C}^1$ et ne s'annule par sur I, $y = \frac{1}{z}$ ne s'annule pas sur I et on a, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x^3 &\iff -\frac{z'(x)}{z(x)^2} - \frac{2}{x}\frac{1}{z(x)} = x^3 \\ &\iff -z'(x) - \frac{2}{x}z(x) = x^3 z(x)^2 \\ &\iff z'(x) + \frac{2}{x}z(x) + x^3 z(x)^2 = 0 \end{aligned}$$

Finalement, y est solution de $\mathscr{P}_0$ si et seulement si z est solution de $\mathscr{P}$.

5. Si z est une solution de $\mathscr{P}$, comme on a admis qu'elle ne s'annule par sur I, avec la question précédente, $\frac{1}{z}$ est solutions de $\mathscr{P}_0$ donc, avec la question 3, on a, pour tout $x \in I$, $\frac{1}{z(x)} = \frac{x^4}{2}$. En conclusion, l'unique solution de $\mathscr{P}$ sur I est
$$x \mapsto \frac{2}{x^4}.$$
6. On a $z(x) = \frac{2}{x^4} \underset{n \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc z n'est pas bornée sur I.

Exercice 2 : Calculs d'intégrales

1. La fonction $\sqrt{}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}_+$ donnée par
$$t \mapsto \frac{1}{1+\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}.$$
2. On a :
$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$
3. On pose, pour $t \in [0,1]$,
$$\begin{cases} f'(t) = \sqrt{t} \\ g(t) = 1-t \end{cases} \text{ qui donne } \begin{cases} f(t) = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \\ g'(t) = -1 \end{cases}.$$
Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ donc, par la formule d'intégration par parties
$$I_1 = \int_0^1 (1-t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[(1-t)\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (-1)\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
donc $I_1 = \frac{4}{15}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^{n+1}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n \big(1-(1-t)\big)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t$$
et on a, par une intégration par parties analogue au cas précédent
$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[(1-t)^{n+1}\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}(n+1)\int_0^1 (1-t)^n t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t.$$
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}(I_n - I_{n+1}).$$
5. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = \frac{3}{2(n+1)} I_n - \frac{2(n+1)}{3} I_{n+1}.$$
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n.$$

6. On a $I_2 = \frac{4}{7}I_1$ donc $I_2 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{15} = \frac{16}{105}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\alpha_{n+1} = \frac{(2(n+1)+3)! \times I_{n+1}}{(n+2) \times \left((n+1)!\right)^2} = \frac{(2n+5)!}{(n+2) \times \left((n+1)!\right)^2} \times \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n = \frac{(2n+4)!}{(n+2)(n+1)^2(n!)^2} I_n$$

donc $\alpha_{n+1} = \dfrac{(2n+4) \times 2}{(n+2)(n+1)} \dfrac{(2n+3)! \times I_n}{(n+1) \times \left(n!\right)^2} = 4\alpha_n$. Finalement, la suite (α_n) est géométrique.

8. On a $\alpha_0 = \frac{3!}{1 \times 1} I_0 = \frac{6 \times 2}{3} = 4$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = 4^{n+1}$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{(n+1)!n!4^{n+1}}{(2n+3)!}.$$

Exercice 3 : Une étude de suite récurrente

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme et pour tout $x \in]-\infty, -2[$, $f'(x) = -2x > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty, -2[$. De plus $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $f(-2) = -2$. Ainsi, f est une fonction continue et strictement croissante sur $]-\infty, -2[$ donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]-\infty, -2[$ sur $f(]-\infty, -2[) =]-\infty, -2[$.
2. On pose $g \colon x \mapsto f(x) - x = -x^2 - x + 2$. Les racines de $-X^2 - X + 2$ sont -2 et 1 donc la fonction g est strictement négative sur $]-\infty, -2[$ (compte-tenu du signe de $-x^2$ lorsque $x \in \mathbb{R}$). Finalement, pour tout $x \in]-\infty, -2[$, $g(x) < 0$. En conclusion, pour tout $x \in]-\infty, -2[$, $f(x) < x$.
3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $f(]-\infty, -2[) \subset]-\infty, -2[$, avec la question précédente, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$. Finalement, la suite (u_n) est strictement décroissante.
4. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq -3$. On a $u_0 = -3 \leq -3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leqslant -3$. On a, par décroissance de (u_n),

$$u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant -3$$

ce qui achève la récurrence. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq -3$.

5. Supposons que (u_n) est convergente vers une limite ℓ. Dans ce cas, (u_{n+1}) étant une suite extraite de (u_n), elle converge également vers ℓ. En passant à la limite dans l'égalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - u_n^2$, on a, par opération,

$$\ell = 2 - \ell^2$$

c'est-à-dire $\ell^2 + \ell - 2 = 0$.

6. La suite (u_n) étant décroissante, ou bien elle converge vers un limite ℓ ou bien elle diverge vers $-\infty$. Or, avec la question précédente, si elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on a $\ell^2 + \ell - 2 = 0$ c'est-à-dire, avec la question 2, $\ell = -2$ ou $\ell = 1$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -3$ donc $\ell \leqslant -3$ ce qui est faux si $\ell = -2$ ou $\ell = 1$. En conclusion

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Exercice 4 : Une étude de suite implicite

1. La fonction tan est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$, on a

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Comme

$$\cos x \underset{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}{\longrightarrow} 0^+ \quad \text{et} \quad \sin x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1,$$

on a par opération $\tan x \underset{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}{\longrightarrow} +\infty$ qui donne par π-périodicité de tan, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tan x \underset{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

De façon analogue, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tan x \underset{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+}{\longrightarrow} -\infty$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par somme, la fonction f est définie et dérivable sur I_n et, pour tout $x \in I_n \setminus \{n\pi\}$,

$$f'(x) = 1+\tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$$

donc f est strictement croissante sur I_n. Comme

$$\tan x \underset{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad -x \underset{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - n\pi$$

donc, par somme $f(x) \underset{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+}{\longrightarrow} -\infty$. De la même manière $f(x) \underset{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-}{\longrightarrow} +\infty$. On a finalement le tableau

x	$-\frac{\pi}{2}+n\pi$		$\frac{\pi}{2}+n\pi$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est strictement croissante et continue sur I_n donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I_n sur $f(I_n) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $f(x_n) = 0$.
5. On a $f(0) = 0$ donc par unicité de x_0, $x_0 = 0$.
6. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2}+n\pi < x_n < \frac{\pi}{2}+n\pi$ et $-\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi < x_n < \frac{\pi}{2}+(n+1)\pi$ donc

$$x_{n+1} - x_n > -\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi - \frac{\pi}{2} - n\pi = -\pi + \pi = 0.$$

Finalement, la suite (x_n) est strictement croissante.

7. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,$-\frac{\pi}{2}+n\pi < x_n$ donc, comme $-\frac{\pi}{2}+n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par encadrement,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

8. On a, tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-\frac{\pi}{2} < x_n - n\pi < \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne, par π-périodicité de tan, comme $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$,

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n).$$

Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\arctan(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. En conclusion, $x_n - n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.