PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante à l'intérieur de chaque exercice.

Durée : 4h

Calculatrice interdite

Bon courage !

Vous laisserez une marge en haut sur la première page pour les annotations.
Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 5 exercices indépendants.

Questions de cours

1. Écrire, pour deux fonctions f, g de classe $\mathbb{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$, la formule d'intégration par parties.
2. Donner une primitive, sur un intervalle qu'on précisera de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. Donner, sans démonstration, l'ensemble des solutions (en réel) de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

Exercice 1 : Équation de Bernoulli

Le but de l'exercice est de résoudre, en supposant que z est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ ne s'annulant pas sur l'intervalle $]0,+\infty[$, le problème de Cauchy d'inconnue z :

$$\mathscr{P} \left\{ \begin{array}{l} z' + \dfrac{2}{x} z + x^3 z^2 = 0 \quad \text{sur }]0,+\infty[, \\ z(1) = 2. \end{array} \right.$$

Ce problème n'est pas de la forme du cours et on étudie d'abord une autre équation différentielle pour le résoudre. On pose dans la suite $I =]0,+\infty[$.

1. Déterminer, en justifiant son existence, une primitive A sur I de $a : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$.
2. Déterminer ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle d'inconnue y :
$$y' - \frac{2}{x} y = x^3 \quad \text{sur } I.$$
3. En déduire que l'unique solution du problème de Cauchy
$$\mathscr{P}_0 \left\{ \begin{array}{l} y' - \dfrac{2}{x} y = x^3 \quad \text{sur }]0,+\infty[, \\ y(1) = \dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$
est la fonction $y : x \mapsto \frac{x^4}{2}$.
4. Soit z une solution de $\mathscr{P}$ ne s'annulant pas sur I, on pose $y = \dfrac{1}{z}$. Justifier que y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que y est solution de $\mathscr{P}_0$.
5. Déterminer l'unique solution de $\mathscr{P}$ sur I.
6. Cette solution est-elle bornée sur I ?

Les équations différentielles de Bernoulli, comme dans $\mathscr{P}$, régissent notamment des potentiels en mécanique.

Exercice 2 : Une étude de suite récurrente

On pose $u_0 = -3$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2 - u_n^2.$$

On considère la fonction $f : x \mapsto 2 - x^2$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $]-\infty,-2[$ sur un intervalle que l'on déterminera.
2. Montrer que, pour tout $x \in]-\infty,-2[$, $f(x) < x$.
3. Déterminer la monotonie de (u_n).

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq -3$.
5. Justifier que si la suite (u_n) est convergente sa limite $\ell \in \mathbb{R}$ vérifie $\ell^2 + \ell - 2 = 0$.
6. Déterminer finalement la limite de (u_n).

Cet exercice est une étude de système dynamique qui a des comportements différents selon la valeur de u_0 Ici, on ne traite que le cas $u_0 = -3$.

Exercice 3 : Calculs d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose,

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer, une primitive, sur un intervalle qu'on précisera de $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$ (on remarquera que $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$).
2. En déduire la valeur de I_0.
3. En effectuant une intégration par parties, calculer I_1 (on utilisera la primitive calculée en 1).
4. Montrer, de façon analogue à la question précédente, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = (n+1)\int_0^1 (1-t)^n \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}(n+1)(I_n - I_{n+1}).$$

5. En déduire une relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, entre I_{n+1} et I_n.
6. Calculer I_2.
7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = \frac{(2n+3)! \times I_n}{(n+1) \times \left(n!\right)^2}.$$

   Montrer que la suite (α_n) est géométrique (on pourra simplifier au maximum $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$).
8. Déterminer une formule pour la suite suite (I_n).

Exercice 4 : Une étude de suite implicite

On rappelle que la fonction tangente est définie par :

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[.$$

1. Rappeler le domaine de définition, de dérivabilité et la valeur de la dérivée de la fonction tan sur son domaine de dérivabilité.
2. Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$, les limites de tan en $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+$ et $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-$ (on pensera à la périodicité).
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir le tableau des variations sur I_n, en justifiant les limites aux bornes, de la fonction

$$f : x \mapsto \tan(x) - x.$$

4. En justifiant le théorème et les hypothèses utilisées, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n$ tel que

$$\tan(x_n) - x_n = 0.$$

5. Déterminer la valeur de x_0.

6. Montrer que (x_n) est strictement croissante (on pourra écrire des encadrements pour x_n et x_{n+1}).
7. Déterminer la limite de (x_n).
8. Montrer que $(x_n - n\pi)$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

On a ainsi montré que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Problème : Suites d'intégrales et irrationalité de $\ln 2$.

Partie I : Une expression de $\ln 2$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie.
2. Calculer I_0 et I_1 (pour I_1, on pourra déterminer un réel A tel que pour tout $t \in [0,1]$: $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{A}{1+t}$).
3. En faisant le changement de variable $y = 1+t$, montrer que

$$I_2 = \int_1^2 (y - 2 + \frac{1}{y})\, \mathrm{d}y$$

puis la valeur de I_2.

4. Montrer, en justifiant, que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}.$$

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, \mathrm{d}t.$$

6. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leq \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$ pour en déduire l'encadrement

$$0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}.$$

8. Justifier la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
9. Conclure en montrant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Partie II : Développement en série entière du logarithme.

Cette partie généralise le résultat précédent. On pourra s'inspirer des questions précédentes pour les résoudre.
Soit $x \in]0,1]$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(xt)^{n+1}}{1+xt} \, \mathrm{d}t$$

11. En faisant par exemple le changement de variable $y = xt$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

12. Montrer l'encadrement, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{(xt)^{n+1}}{1+xt} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+2}$.
13. Conclure, en justifiant les existences que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \ln(1+x).$$

Partie III : Irrationalité de $\ln 2$**.**
On veut montrer que $\ln 2$ est irrationnel en raisonnant par l'absurde. Comme $\ln 2 > 0$, on suppose donc qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\ln 2 = \frac{p}{q}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, e^{t \ln 2} \mathrm{d}t.$$

14. Calculer J_0 et J_1.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n > 0$.
16. En encadrant la fonction dans l'intégrale de J_n, montrer que pour tout $D \in \mathbb{R}$, $D^n J_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
17. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2} J_n - \frac{(4n+6)\,q^2}{p^2} J_{n+1}.$$

18. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers A_n tel que :

$$J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2} A_n\left(-\frac{p}{q}\right) \right].$$

19. Montrer que si $D = 2p^3$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n J_n \in \mathbb{N}^*$.
20. À l'aide de la question précédente et de la question 16, conclure quant à l'irrationalité de $\ln 2$.
