Exercice 1 : Une équation de degré 4 dans $\mathbb{C}$

1. Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=0$. Le carré d'un réel étant toujours positif, on aurait $z^2+3z-2=0$ et $2z^2-3z+2=0$ ce qui donne $-z^2-3z+2=2z^2-3z+2=0$ puis $z=0$ ce qui faux puisque $(0^2+3\times 0-2)^2+(2\times 0^2-3\times 0+2)^2=8\neq 0$. Finalement les solutions de l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=0$ ne peuvent être réelles.
2. On a, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2 &= (z^2+3z-2)^2-(2iz^2-3iz+2i)^2\\ &= \big((1+2i)z^2+(3-3i)z-2+2i\big)\big((1-2i)z^2+(3+3i)z-2-2i\big)\end{aligned}$$

   qui est bien de la forme

$$(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=\big((1+2i)z^2+(3-3i)z-2+2i\big)\big(\alpha z^2+\beta z+\gamma\big).$$

   avec $\alpha=1-2i$, $\beta=3+3i$ et $\gamma=-2-2i$.
3. Soit $\delta=a+ib$ où $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $\delta^2=24-10i$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\delta^2=24-10i &\iff a^2-b^2+2iab=24-10i \text{ et } |\delta|^2=|24-10i|\\ &\iff \begin{cases}a^2-b^2 = 24\\ 2ab = -10\\ a^2+b^2 = \sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{676}=26\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}2a^2 = 50\\ 2b^2 = 2\\ ab<0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}a^2 = 25\\ b^2 = 1\\ ab<0\end{cases}\end{aligned}$$

   Ainsi, une racine de $24-10i$ est $\delta=5-i$.
4. Le discriminant Δ de l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$, $(1+2i)z^2+(3-3i)z-2+2i=0$ vaut

$$\Delta=(3-3i)^2-4\times(-2+2i)\times(1+2i)=24-10i\neq 0.$$

   On a calculé une racine de Δ à la question précédente qu'on a noté $\delta=5-i$. Les solutions de l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$, $(1+2i)z^2+(3-3i)z-2+2i=0$

$$\frac{3-3i+\delta}{2(1+2i)}=\frac{8-4i}{2+4i}=2i \quad\text{et}\quad \frac{3-3i-\delta}{2(1+2i)}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i.$$

5. Le discriminant de l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $(1-2i)z^2+(3+3i)z-2-2i=0$ est $24+10i$ c'est-à-dire $\overline{24-10i}$ dont une racine est $\overline{5-i}=5+i$ donc les solutions de cette équation sont $\overline{2i}=-2i$ et $\overline{\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$.
6. On a l'équivalence, pour $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}&(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=0\\ \iff\ &\big((1+2i)z^2+(3-3i)z-2+2i\big)\big((1-2i)z^2+(3+3i)z-2-2i\big)=0\\ \iff\ &(1+2i)z^2+(3-3i)z-2+2i)=0 \quad\text{ou}\quad (1-2i)z^2+(3+3i)z-2-2i=0.\end{aligned}$$

donc avec les deux questions précédentes, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=0 \Longleftrightarrow z=2i \quad \text{ou} \quad z=-2i \quad \text{ou} \quad z=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i \quad \text{ou} \quad z=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i.$$

En conclusion, les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=0$$

sont $2i$, $-2i$, $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$ et $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$.

Exercice 2 : Inégalité arithmético-géométrique

Convexité

1. On considère la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - 1 - x$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme. Pour tout réel x, $\varphi'(x) = e^x - 1$ qui est du signe de x. Ainsi φ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ en 0 donné par $\varphi(0) = 0$. En conclusion, φ est positive sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.
2. La fonction exp étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ deux fois donc, par composition et somme, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ deux fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\,e^a + (1-t)\,e^b - e^{t\,a+(1-t)\,b}\right) = e^a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) + e^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{t\,a+(1-t)\,b}\right) \\ &= e^a - e^b - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\,a+(1-t)\,b)\left(e^{t\,a+(1-t)\,b}\right) = e^a - e^b - (a-b)e^{t\,a+(1-t)\,b}. \end{aligned}$$

   et de la même manière

$$g''(t) = -(a-b)^2 e^{t\,a+(1-t)\,b}.$$

3. La fonction g'' est strictement négative sur $[0,1]$ car $-(a-b)^2 < 0$ et $\exp > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc g' est strictement décroissante sur $[0,1]$.
4. On a $g'(0) = e^a - e^b - (a-b)e^b = e^b\big(e^{a-b} - 1 - (a-b)\big) > 0$ en appliquant la question 1 à $x = a-b$ et car $e^b > 0$. De façon analogue, on a $g'(1) = e^a - e^b - (a-b)e^a = e^a\big(1 + (b-a) - e^{b-a}\big) < 0$ en appliquant la question 1 à $x = b-a$ et car $e^a > 0$.
5. La fonction g' est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ donc, par le théorème de la bijection, g' réalise une bijection de $[0,1]$ sur $g'([0,1])$. De plus, comme $g'(0) > 0$ et $g'(1) < 0$, $0 \in g([0,1])$ donc il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
6. On a le tableau

x	1		α		1
g''		$-$		$-$	
g'		$\searrow$	0	$\searrow$	
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

7. On a $g(0) = e^b - e^b = 0$ et $g(1) = e^a - e^a = 0$ donc, avec la tableau, la fonction g est positive sur $[0,1]$. En conclusion, pour tout $t \in [0,1]$:

$$e^{t\,a+(1-t)\,b} \leq t\,e^a + (1-t)\,e^b.$$

Inégalité arithmético-géométrique

8. On a, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, en utilisant l'inégalité de 7 avec $t = \frac{1}{2}$,

$$\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x_1+\left(1-\frac{1}{2}\right)x_2} \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x_1} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{x_2} = \frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}.$$

Ainsi, le résultat demandé est vrai pour $n = 2$.

9. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}\right).$$

Le cas $n = 2$ est réglé par la question précédente.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}\right).$$

Soit $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1}} = e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n+1}+\frac{x_{n+1}}{n+1}} = e^{\frac{n}{n+1}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\frac{1}{n+1}x_{n+1}}$$

puis, en appliquant la question 7 avec $a = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, $b = x_{n+1}$ et $t = \frac{n}{n+1}$ (qui donne $1-t = \frac{1}{n+1}$), on a

$$e^{\frac{n}{n+1}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\frac{1}{n+1}x_{n+1}} \leq \frac{n}{n+1}e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} + \frac{1}{n+1}e^{x_{n+1}}.$$

On applique désormais l'hypothèse de récurrence. On obtient

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1}} \leq \frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\left(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}\right) + \frac{1}{n+1}e^{x_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(e^{x_1}+\cdots+e^{x_{n+1}}\right)$$

ce qui achève la récurrence.
En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}\right).$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{+,*}$. On pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \ln a_i$. On a, avec la question précédente,

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}\right).$$

Or

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} = \left(e^{x_1}\times\cdots\times e^{x_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a_1\times\cdots\times a_n\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\left(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}\right) = \frac{1}{n}\left(a_1+\cdots+a_n\right).$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{+,*}$,

$$\left(a_1\times\cdots\times a_n\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

Exercice 3 : Droite d'Euler

Cas où le cercle circonscrit est centré en O

1. On a, par définition d'un milieu, $\overrightarrow{AI_1} = \overrightarrow{I_1B}$ donc, en traduisant cela sur les affixes de ces vecteurs, on obtient $i_1 - a = b - i_1$ qui donne $i_1 = \frac{a+b}{2}$. De la même manière, $i_2 = \frac{b+c}{2}$ et $i_3 = \frac{a+c}{2}$.

2. Comme A,B,C sont sur le cercle de centre O et de rayon R, $|a|=|b|=|c|=R$. En écrivant a,b,c sous forme exponentielle (en prenant des argument dans $[0,2\pi[$), il existe des réels $\theta_A,\theta_B,\theta_C \in [0,2\pi[$ tel que $a=R\mathrm{e}^{i\theta_A}$, $b=R\mathrm{e}^{i\theta_B}$ et $c=R\mathrm{e}^{i\theta_C}$.

3. On a

$$z=\frac{b+a}{b-a}=\frac{R\mathrm{e}^{i\theta_B}+R\mathrm{e}^{i\theta_A}}{R\mathrm{e}^{i\theta_B}-R\mathrm{e}^{i\theta_A}}=\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\theta_B+\theta_A}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta_B-\theta_A}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{\theta_A-\theta_B}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{\theta_B+\theta_A}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta_B-\theta_A}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{\theta_A-\theta_B}{2}}\right)}=\frac{2\cos\left(\frac{\theta_B-\theta_A}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta_B-\theta_A}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}i.$$

Ainsi, $z=\frac{h-c}{b-a}$ est un imaginaire pur donc, lorsque $H\neq C$, les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. Par suite, lorsque $H\neq C$, les droites (AB) et (CH) sont perpendiculaires.

4. On montrerait de la même manière que les nombres complexes

$$\frac{h-a}{b-c} \quad \text{et} \quad \frac{h-b}{c-a}$$

sont des imaginaires purs donc les droites (BC) et (AH) sont perpendiculaires et que les droites (AC) et (BH) sont perpendiculaires lorsque, respectivement, $A\neq H$ et $B\neq H$.

Finalement, les hauteurs du triangle sont respectivement confondues avec les droites (AH), (BH) et (CH). Ces droites se coupent donc en un unique point : le point H est l'orthocentre de ABC.

5. On a

$$g-a=\frac{b+c-2a}{3}=\frac{3}{2}\frac{b+c-2a}{2}=\frac{3}{2}(i_2-a)$$

ce qui signifie que $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{I_2A}$ donc G appartient à la droite (AI_2). On montre de façon analogue qu'on a $\overrightarrow{CG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{I_2C}$ et $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{I_3B}$ donc G appartient aux droites (CI_1) et (BI_3).

6. Les droites (CI_1), (BI_3) et (AI_2), qui sont les médianes du triangle ABC, se coupent en un même point G. Le point G est donc le centre de gravité du triangle ABC. On a la relation $3AG=2AI_2$.

7. On a, $g=\frac{a+b+c}{3}=\frac{1}{3}h$ donc $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$. Ceci signifie que les points O,G et H sont alignés et on a l'égalité $3OG=OH$.

Cas quelconque

8. S'il existe un cercle passant par les points A,B et C alors, en notant ω l'affixe de son centre Ω et R son rayon, on a $\Omega A=\Omega B=\Omega C=R$ ce qui s'écrit $R=|\omega-a|=|\omega-b|=|\omega-c|$.

9. On procède par analyse synthèse. Supposons qu'il existe un cercle passant par les points A,B et C. Notons Ω son centre dont l'affixe est noté ω et R son rayon. On a donc $R=|\omega-a|=|\omega-b|=|\omega-c|$. On pose $u=\omega-a$, $\alpha=b-a$ et $\beta=c-a$. On a $|u|^2=|u-\alpha|^2$ et $|u|^2=|u-\beta|^2$. On obtient les équivalences

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} u\overline{u} &=& \overline{u-\alpha}(u-\alpha)\\ u\overline{u} &=& \overline{u-\alpha}(u-\alpha)\end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} u\overline{u} &=& u\overline{u}-\overline{\alpha}u-u\overline{\alpha}+|\alpha|^2\\ u\overline{u} &=& u\overline{u}-\overline{\beta}u-u\overline{\beta}+|\beta|^2\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \overline{\alpha}u+u\overline{\alpha} &=& |\alpha|^2\\ \overline{\beta}u+u\overline{\beta} &=& |\beta|^2\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \beta\overline{\alpha}u+\beta u\overline{\alpha} &=& \beta|\alpha|^2\\ \alpha\overline{\beta}u+\alpha u\overline{\beta} &=& \alpha|\beta|^2\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \beta\overline{\alpha}u+\beta u\overline{\alpha} &=& \beta|\alpha|^2\\ \alpha\overline{\beta}u+\alpha u\overline{\beta} &=& \alpha|\beta|^2\end{array}\right.\\
&\iff \beta u\overline{\alpha}-\overline{\beta}u\alpha=\beta|\alpha|^2-\alpha|\beta|^2
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\omega - a = u = \frac{\beta|\alpha|^2 - \alpha|\beta|^2}{\beta\overline{\alpha} - \overline{\beta}\alpha}$$

On a également

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{2}\left(1+i\frac{\mathrm{Re}\left[\overline{(c-a)}(c-b)\right]}{\mathrm{Im}\left[\overline{(b-a)}(c-b)\right]}\right) &= \frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{2\,\mathrm{Re}\left[\overline{\beta}(\beta-\alpha)\right]}{2i\,\mathrm{Im}\left[\overline{\alpha}(\beta-\alpha)\right]}\right)\\
&= \frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\overline{\beta}(\beta-\alpha)+\beta\overline{(\beta-\alpha)}}{\overline{\alpha}(\beta-\alpha)-\alpha\overline{(\beta-\alpha)}}\right)\\
&= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\beta\overline{\alpha}-\overline{\beta}\alpha-\overline{\beta}(\beta-\alpha)-\beta\overline{(\beta-\alpha)}}{\beta\overline{\alpha}-\overline{\beta}\alpha}\right)\\
&= \frac{\beta|\alpha|^2-\alpha|\beta|^2}{\beta\overline{\alpha}-\overline{\beta}\alpha} = u
\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$\omega = a + \frac{b-a}{2}\left(1+i\frac{\mathrm{Re}\left[\overline{(c-a)}(c-b)\right]}{\mathrm{Im}\left[\overline{(b-a)}(c-b)\right]}\right).$$

De plus, on a $R = |\omega - a|$ ce qui assure l'unicité du cercle passant par les points A,B,C.
Réciproquement, en posant ω comme dans la formule précédente et $R = |\omega - a|$, le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon R passe par les points A,B et C. En conclusion, il existe un unique cercle passant par les points A,B et C.

10. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$ a pour affixe $\omega - 0 = \omega$ donc, en notant, a',b',c' les affixes respectifs de A',B',C', on a

$$a' = a - \omega, \quad b' = b - \omega, \quad \text{et} \quad c' = c - \omega.$$

Notons h' et g' les affixes respectifs de l'orthocentre et du centre de gravité de $A'B'C'$. Dans ce cas, comme le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$ est en O, on a

$$h' = a' + b' + c' = a + b + c - 3\omega \quad \text{et} \quad g' = \frac{a'+b'+c'}{3} = \frac{a+b+c}{3} - \omega.$$

11. Notons h et g les affixes respectifs de l'orthocentre et du centre de gravité de ABC. Par définition d'une translation, on a $h = h' + \omega$ et $g = g' + \omega$ donc $h = a + b + c - 2\omega$ et $g = \frac{a+b+c}{3}$. Ainsi, on a

$$g - \omega = \frac{1}{3}(h - \omega)$$

ce qui signifie que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$. En conclusion, les points O,G et H sont alignés (et on a encore l'égalité $3OG = OH$).

Exercice 4 : Coefficients binomiaux et trigonométrie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $x \in]-\pi,\pi[$,

$$\mathrm{e}^{ix} + 1 = \mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}$$

donc $2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est le module de $\mathrm{e}^{ix}+1$ et $\frac{x}{2}$ est un argument de $\mathrm{e}^{ix}+1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Avec le calcul précédent, on a

$$\operatorname{Re}\left((e^{ix}+1)^n\right) = \operatorname{Re}\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}\right) = \operatorname{Re}\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\, 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)$$

donc

$$\operatorname{Re}\left((e^{ix}+1)^n\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a, avec la formule du binôme de Newton

$$(e^{ix}+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) = \operatorname{Re}\left((e^{ix}+1)^n\right) = 2^n \cos^n\big(\frac{x}{2}\big)\cos\big(\frac{nx}{2}\big).$$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(k \times 0) = 1$ et $\cos(k \times \pi) = (-1)^k$ donc,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\times 0) = \operatorname{Re}\left((e^{ix}+1)^n\right) = 2^n\cos^n\big(\frac{0}{2}\big)\cos\big(\frac{n0}{2}\big) = 2^n$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\times\pi) = \operatorname{Re}\left((e^{ix}+1)^n\right) = 2^n\cos^n\big(\frac{\pi}{2}\big)\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big) = 0.$$

5. On a, par définition des sommes A, B, C,

$$A+B+C = \sum_{0\le 3k\le n}\binom{n}{3k} + \sum_{0\le 3k+1\le n}\binom{n}{3k+1} + \sum_{0\le 3k+2\le n}\binom{n}{3k+2} = \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$j^{3k} = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^{3k} = e^{2ik\pi} = 1$$

et de la même manière

$$j^{3k+1} = e^{2ik\pi+\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j \quad \text{et} \quad j^{3k+2} = e^{2ik\pi+\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = \bar{j}.$$

7. On a

$$\begin{aligned}
(e^{i\frac{2\pi}{3}}+1)^n &= (1+j)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} j^k 1^{n-k} \\
&= \sum_{0\le 3k\le n}\binom{n}{3k} j^{3k} + \sum_{0\le 3k+1\le n}\binom{n}{3k+1} j^{3k+1} + \sum_{0\le 3k+2\le n}\binom{n}{3k+2} j^{3k+2} \\
&= \sum_{0\le 3k\le n}\binom{n}{3k} + \sum_{0\le 3k+1\le n}\binom{n}{3k+1} j + \sum_{0\le 3k+2\le n}\binom{n}{3k+2}\bar{j} \\
&= \sum_{0\le 3k\le n}\binom{n}{3k} + j\sum_{0\le 3k+1\le n}\binom{n}{3k+1} + \bar{j}\sum_{0\le 3k+2\le n}\binom{n}{3k+2}
\end{aligned}$$

donc, avec le calcul de la question 2,

$$A+jB+\overline{j}C=2^n e^{\frac{in\pi}{3}}\cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Ainsi, comme $A,B,C\in\mathbb{R}$,

$$A+\overline{j}B+jC=\overline{A+jB+jC}=\overline{2^n e^{\frac{in\pi}{3}}\cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right)}=2^n e^{-\frac{in\pi}{3}}\cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

8. On a $1+j+\overline{j}=1+j+j^3=\frac{j^3-1}{j-1}=0$ car $j^3=1$ et $j\neq 1$. En sommant les identités trouvées précédemment, on a

$$A+B+C=A+jB+\overline{j}C+A+\overline{j}B+jC=2^n+2^n e^{\frac{in\pi}{3}}\cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right)+2^n e^{-\frac{in\pi}{3}}\cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ce qui s'écrit

$$3A+(1+j+\overline{j})B+(1+j+\overline{j})C=2^n+2^n\times 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

qui donne ainsi, puisque $1+j+\overline{j}=0$,

$$3A=2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

On conclusion, on a

$$A=\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right].$$

On pourra faire la somme des relations trouvées aux questions 5 et 7 et utiliser l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

9. Soit $p\in\mathbb{N}$. Lorsque $n=3p$, on a

$$A=\frac{1}{3}\left[2^{3p}+2\cos\left(\frac{3p\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{3}\left[2^{3p}+2\cos(p\pi)\right]=\frac{1}{3}\left[2^{3p}+2\times(-1)^p\right]$$

ce qui s'écrit

$$A=\frac{2^{3p}+2(-1)^p}{3}.$$

De façon analogue, lorsque respectivement $n=3p+1$ et $n=3p+2$, on a respectivement

$$A=\frac{2^{3p+1}+(-1)^p}{3}\quad\text{et}\quad A=\frac{2^{3p+2}+(-1)^{p+1}}{3}.$$

Exercice 5 : Une équation fonctionnelle

1. En prenant, dans la condition $\mathscr{P}$, $x=y=0$, on a $f(0)f(0)+f(0+0)=0\times 0$ donc $f(0)^2+f(0)=0$. Ainsi, $f(0)\big(f(0)+1\big)=0$ donc $f(0)=0$ ou $f(0)=-1$.
2. Supposons que $f(0)=0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a, en prenant, dans la condition $\mathscr{P}$, $y=0$,

$$f(x)f(0)+f(x+0)=0$$

c'est-à-dire, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0$.

3. Supposons que $f(0)=-1$. En prenant, dans la condition $\mathscr{P}$, $x=-1$ et $y=1$, on a

$$f(-1)f(1)+f(-1+1)=-1\times 1$$

donc $f(-1)f(1)-1=-1$. On a donc $f(-1)f(1)=0$ c'est-à-dire $f(1)=0$ ou $f(-1)=0$.

4. Supposons que $f(0)=-1$ et que $f(1)=0$. On a, pour tout $t\in\mathbb{R}$, en prenant, dans la condition $\mathscr{P}$, les cas particuliers $x=t-1$ et $y=1$, on a

$$f(t-1)\underbrace{f(1)}_{=0}+\underbrace{f(t-1+1))}_{=f(t)}=(t-1)\times 1$$

donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)=t-1$.

De façon analogue, si $f(0)=-1$ et que $f(-1)=0$ alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)=-t-1$ (on fait le même raisonnement que précédemment en prenant $x=-t+1$ et $y=-1$).

5. Dans les questions précédentes, on a montré que si f vérifie $\mathscr{P}$ alors on a trois cas possibles : f est la fonction nulle ou $f:t\mapsto t-1$ ou $f:t\mapsto -t-1$.

Réciproquement, si f est la fonction nulle, f n'est pas solution de $\mathscr{P}$. En effet, si f était la fonction nulle, on aurait $f(1)f(1)+f(1+1)=0\neq 1\times 1$. En revanche, si $f:t\mapsto t-1$, pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,

$$f(x)f(y)+f(x+y)=(x-1)(y-1)+(x+y-1)=xy$$

et de même si $f:t\mapsto -t-1$.

En conclusion, les solutions de $\mathscr{P}$ sont les fonctions $f:t\mapsto t-1$ et $f:t\mapsto -t-1$.