PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante à l'intérieur de chaque exercice.

Durée : 4h

Calculatrice interdite

Bon courage !

Vous laisserez une marge en haut sur la première page pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 5 exercices indépendants.

Questions de cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comment s'expriment les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^n = 1$?
2. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité ainsi que l'expression de la dérivée de la fonction arccos.
3. Rappeler la formule du binôme de Newton permettant de développer, pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n$.

Exercice 1 : Une équation de degré 4 dans $\mathbb{C}$

Le but de l'exercice est résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=0.$$

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une solution de $(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=0$ alors $z \notin \mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=\big((1+2i)z^2+(3-3i)z-2+2i\big)\big(\alpha z^2+\beta z+\gamma\big).$$
3. Déterminer un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = 24-10i$ (on pourra calculer 26^2).
4. Montrer que l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $(1+2i)z^2+(3-3i)z-2+2i=0$ possède deux solutions données par : $2i$ et $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$.
5. Avec les valeurs de α, β, γ trouvées à la question 2, déterminer également les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$.
6. Déterminer finalement les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$(z^2+3z-2)^2+(2z^2-3z+2)^2=0.$$

Exercice 2 : Inégalité arithmético-géométrique

Convexité

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On veut montrer que pour tout $t \in [0,1]$:

$$e^{t\,a+(1-t)\,b} \leq t\,e^a+(1-t)\,e^b. \tag{1}$$

On pose pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) = t\,e^a+(1-t)\,e^b-e^{t\,a+(1-t)\,b}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$.
2. Justifier g est dérivable deux fois sur $[0,1]$ et que pour tout $t \in [0,1]$, $g'(t) = e^a-e^b-(a-b)\,e^{t\,a+(1-t)\,b}$. Calculer également g'' (on rappelle que a et b sont **fixés**).
3. En déduire que g' est strictement décroissante sur $[0,1]$.
4. Montrer, avec la question 1, que $g'(0) = e^b\big(e^{a-b}-1-(a-b)\big) > 0$ et déterminer aussi le signe de $g'(1)$.
5. Justifier, en citant le théorème utilisé, qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
6. Construire un tableau sur $[0,1]$ faisant apparaître α, le signe de g'', les variations de g', le signe de g' et les variations de g.
7. Calculer $g(0)$ et $g(1)$ puis conclure.

Inégalité arithmético-géométrique

On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}\right). \tag{2}$$

8. En appliquant (1) pour $t = \frac{1}{2}$, montrer le résultat demandé pour $n = 2$.
9. Montrer le résultat (2) par récurrence. Pour montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$,
$$e^{\frac{n}{n+1}\left[\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right]+\frac{x_{n+1}}{n+1}} \leq \frac{n}{n+1}e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} + \frac{1}{n+1}e^{x_{n+1}},$$
on pourra utiliser le résultat (1) avec $t = \frac{n}{n+1}$.
10. *Application :* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+,*}$,
$$(a_1 \times \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

Exercice 3 : Droite d'Euler

On considère que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On va montrer dans cet exercice que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés et vérifient certaines relations. On rappelle pour la suite de l'exercice que :

1. l'orthocentre du triangle est le point d'intersection des hauteurs du triangle ;
2. le cercle circonscrit à un triangle est l'unique cercle passant par les sommets du triangle ;
3. le centre de gravité du triangle est le point d'intersection des médianes du triangle (droites joignant le milieu d'un côté et un sommet opposé au côté).

Cas où le cercle circonscrit est centré en O

Dans cette partie, on considère $R \in \mathbb{R}^{+,*}$ et A, B et C trois points du plan distincts et non alignés appartenant au cercle de centre O et de rayon R. On notera dans la suite a, b, c les affixes respectifs des points A, B, C.

1. On considère I_1, I_2, I_3 les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ dont on note les affixes i_1, i_2, i_3. Justifier que $i_1 = \frac{a+b}{2}$ et exprimer de la même manière i_2 et i_3.
2. Justifier qu'il existe $\theta_A, \theta_B, \theta_C \in [0, 2\pi[$ tel que $a = Re^{i\theta_A}$, $b = Re^{i\theta_B}$ et $c = Re^{i\theta_C}$.
3. On considère H le point d'affixe $h = a+b+c$ et on pose $z = \frac{h-c}{b-a}$. Justifier que
$$z = \frac{\cos\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A-\theta_B}{2}\right)} i.$$
Lorsque $H \neq C$, que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CH) ?
4. En faisant le même raisonnement pour les droites (BC) et (AH) puis (AC) et (BH), déterminer ce que représente H pour le triangle ABC.
5. On considère G le point d'affixe $g = \frac{a+b+c}{3}$. Montrer que G appartient à la droite (AI_2) (on pourra déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g - a = \lambda(i_2 - a)$). Justifier de même que G appartient aux droites (CI_1) et (BI_3).
6. Que représente G pour le triangle ABC et quelle relation a-t-on entre les longueurs AG et AI_2 ?
7. Conclure que O, G et H sont alignés et déterminer une relation entre les longueurs OG et OH.

Cas quelconque

Dans cette partie, on considère A, B et C trois points du plan appartenant distincts et non alignés. On notera dans la suite a, b, c les affixes respectifs des points A, B, C.

8. Justifier que s'il existe un cercle passant par les points A,B et C alors, en notant ω l'affixe de son centre et R son rayon, on a $R = |\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$.
9. Montrer qu'il existe un unique cercle passant par les points A,B et C. On montrera que l'affixe ω de son centre Ω est

$$\omega = a + \frac{b-a}{2}\left(1 + i\frac{\mathrm{Re}\left[\overline{(c-a)}(c-b)\right]}{\mathrm{Im}\left[\overline{(b-a)}(c-b)\right]}\right).$$

Cette relation ne sera pas utile dans la suite. On a donc montré dans cette question l'existence et l'unicité du cercle circonscrit.

10. On considère la translation de vecteur $\vec{\Omega O}$ et A', B', C' les images de ces points par cette translation. Déterminer les affixes des points A', B', C' ainsi que de l'orthocentre et du centre de gravité de $A'B'C'$.
11. Montrer que dans ce cas quelconque que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC sont alignés (il ne sera pas utile d'utiliser l'expression de ω précédente).

Exercice 4 : Coefficients binomiaux et trigonométrie

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est notamment d'exprimer

$$\sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}.$$

1. Déterminer, pour $x \in]-\pi, \pi[$, le module et un argument du nombre complexe $e^{ix} + 1$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Re}\left((e^{ix}+1)^n\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

3. Montrer, avec la question de cours numéro 3, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

4. Simplifier, lorsque $k \in \mathbb{N}$, $\cos(k \times 0)$ et $\cos(k \times \pi)$ puis donner une expression simple, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$A = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}, \quad B = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} \quad \text{et} \quad C = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}.$$

5. Justifier que $A + B + C = 2^n$.
6. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $j^{3k} = 1$, $j^{3k+1} = j$ et $j^{3k+2} = \bar{j}$.
7. En procédant comme dans les questions 2 et 3, montrer que

$$A + jB + \bar{j}C = 2^n e^{\frac{in\pi}{3}} \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

puis déterminer une formule analogue pour $A + \bar{j}B + jC$.

8. Que vaut $1 + j + \bar{j}$? Montrer que

$$A = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right].$$

On pourra faire la somme des relations trouvées aux questions 5 et 7 et utiliser l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

9. Soit $p \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression de A lorsque $n = 3p$, $n = 3p+1$ puis $n = 3p+2$.

Exercice 5 : Une équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété suivante $\mathscr{P}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)f(y) + f(x+y) = xy. \tag{$\mathscr{P}$}$$

Dans les questions 1 à 4, on fixe une fonction f qui vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

1. Justifier que $f(0)^2 + f(0) = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
2. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
3. On suppose dans cette question et la suivante que $f(0) = -1$. Montrer que $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$.
4. Montrer que si $f(1) = 0$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t - 1$. Montrer que si $f(-1) = 0$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = -t - 1$.
5. Conclure l'exercice.