Exercice 1 : Une étude de fonction

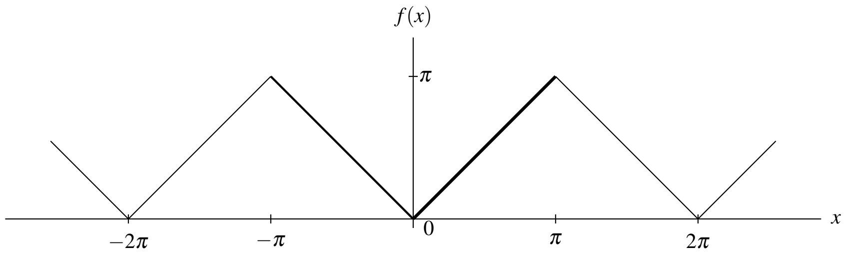
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x < 1$ donc $2-\cos x > 1$. Ainsi, f est un quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par suite, f est définie sur $\mathbb{R}$. Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2-\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{2-\cos x} = -f(x)$$
donc f est impaire.
En conclusion, f est définie sur $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$ et est impaire.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x+2\pi \in \mathbb{R}$ et
$$f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{2-\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin x}{2-\cos x} = f(x).$$
En conclusion, f est 2π-périodique.
3. La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}(f)$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = \frac{\cos(x)\big(2-\cos(x)\big)-\sin(x)\sin(x)}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos(x)-(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}$$
qui est du signe de $2\cos x - 1$ car $(2-\cos x)^2 > 0$.
4. On a, pour tout $x \in [0,\pi]$,
$$2\cos x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}]$$
et, de même, $2\cos x - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow x \in [\frac{\pi}{3},\pi]$. De plus, $f(0)=0$, $f(\pi)=0$ et
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
On obtient ainsi le tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

5. Avec le tableau de variations, on a, pour tout $x \in [0,\pi]$,
$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$
donc, par imparité, pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Or, f est 2π-périodique donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
En conclusion, f est bornée sur $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Fonction $\arccos \circ \cos$

1. On a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, comme $\frac{\pi}{4} \in [0,\pi]$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ donc
$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$
2. La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction arccos est définie sur $[-1,1]$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par parité de cos,
$$f(-x) = \arccos\big(\cos(-x)\big) = \arccos\big(\cos(x)\big) = f(x).$$
En conclusion, f est une fonction paire.
4. La fonction f étant 2π-périodique, il suffit d'étudier f sur $[-\pi,\pi]$. Comme f est également paire, il suffit finalement de l'étudier sur $[0,\pi]$.
5. Pour tout $x \in [0,\pi]$ et tout $y \in [-1,1]$, on a l'équivalence :
$$\cos(x) = y \Longleftrightarrow x = \arccos(y).$$
Finalement, pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(x) = \arccos\big(\cos x\big) = x$.
6. Pour construire le graphe $\mathscr{C}_f$ de f, on trace la courbe de $x \mapsto x$ sur $[0,\pi]$ puis de $x \mapsto -x$ sur $[-\pi,0]$ car f est paire avant de compléter par 2π-périodicité. On obtient le graphe suivant :



7. Comme arccos est dérivable sur $]-1,1[$, f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\cos(x) \neq 1$ et $\cos(x) \neq -1$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Avec les questions précédentes, on sait que, pour tout $x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$,
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0,\pi[; \\ -x & \text{si } x \in]-\pi,0[\end{cases}$$
donc
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,\pi[; \\ -1 & \text{si } x \in]-\pi,0[. \end{cases}$$
En conclusion, par 2π-périodicité, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,\pi[+2\pi\mathbb{Z}; \\ -1 & \text{si } x \in]-\pi,0[+2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Exercice 3 : Une simplification

1. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme. De plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.
2. On a, pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,

$$(x+y)^3 = (x+y)(x^2+2xy+y^2) = x^3+3x^2y+3y^2x+y^3 = x^3+y^3+3xyx+3xyy = x^3+y^3+3xy(x+y).$$

3. Avec la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
a^3 &= \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3\\
&= \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)\\
&= 20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}a\\
&= 40+3\sqrt[3]{20^2-(14\sqrt{2})^2}a\\
&= 40+3\sqrt[3]{8}a
\end{aligned}$$

donc $a^3 = 40+6a$.

4. Procédons par analyse-synthèse. Supposons qu'il existe $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tel que

$$x^3-6x-40 = (x-4)(\alpha x^2+\beta x+\gamma).$$

En développant, on aurait pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$x^3-6x-40 = \alpha x^3+(\beta-4\alpha)x^2+(\gamma-4\beta)x-4\gamma.$$

Ainsi, on a $\alpha=1$, $\beta-4\alpha=0$, $(\gamma-4\beta)=-6$ et $-4\gamma=-40$ qui donne $\alpha=1$, $\beta=4$, $\gamma=10$.
On vérifie qu'en développant, on a effectivement, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x-4)(x^2+4x+10) = x^3-6x-40$.

5. La fonction $\psi : x\mapsto x^2+4x+10$, définie sur $\mathbb{R}$, est une fonction polynomiale de degré 2 dont le discriminant vaut $4^2-4\times10=-24<0$ donc cette fonction est de signe constant sur $\mathbb{R}$. De plus $\psi(0)=10>0$. Finalement $x\mapsto x^2+4x+10$ une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$.
6. Avec les deux questions précédentes, on a les équivalences, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$x^3-6x-40=0 \iff (x-4)(\underbrace{x^2+4x+10}_{>0})=0 \iff x-4=0.$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$: $x^3-6x-40=0$ est 4.

7. Avec la question 3, $a^3-6a-40=0$ donc a est l'unique solution de l'équation de la question précédente. En conclusion, $a=4$.

Exercice 4 : Fonctions sigmoïdes

Fonction tangente hyperbolique

1. On a $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$. La fonction th est donc un quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{sh}'(x)\,\text{ch}(x) - \text{ch}'(x)\,\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{x} + e^{-x}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \text{th}(x).$$

Finalement, th est une fonction impaire.

2. On a, sur $\mathbb{R}$, $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2} > 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{th}(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

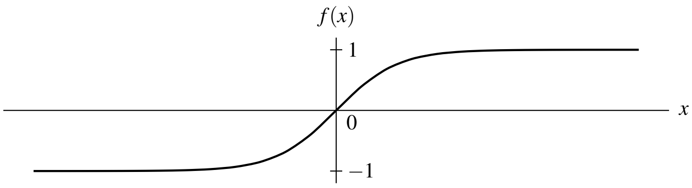
donc, comme $e^{-2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations

$$\text{th}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1.$$

De la même manière $\text{th}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1$. On obtient ainsi le tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

puis la représentation graphique :



3. La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème de la bijection, th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\text{th}(\mathbb{R}) =]-1,1[$ (la dernière égalité étant justifié par le tableau de variations).

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$. On a les équivalences, en posant $X = e^X > 0$,

$$\begin{array}{rlclcr}
y = \text{th}(x) & \iff & y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & \iff & y = \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \\
& \iff & y = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} & \iff & (X^2 + 1)y = X^2 - 1 \\
& \iff & (1 - y)X^2 = 1 + y & \iff & X^2 = \frac{1+y}{1-y} \\
& \iff & (e^x)^2 = \frac{1+y}{1-y} & \iff & e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \\
& \iff & x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) & &
\end{array}$$

En conclusion, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\text{th}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

5. La fonction ln étant dérivable sur $]0,+\infty[$, th^{-1} est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ lorsque $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Ainsi, th^{-1} est dérivable sur$]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\left(\text{th}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}.$$

Finalement th^{-1} est dérivable sur$]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\left(\text{th}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Fonction sigmoïde

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+e^{-\lambda x} > 1 > 0$ donc f_λ est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas : f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_\lambda'(x) = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+e^{-\lambda x})}{(1+e^{-\lambda x})^2} = -\frac{-\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2}.$$

7. La dérivée de f_λ est du signe de λ. On distingue les cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$.
   Lorsque $\lambda > 0$, f_λ est strictement croissante et, comme $e^{-\lambda x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $e^{-\lambda x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par opérations

$$f_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} = 1 \quad \text{et} \quad f_\lambda(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Lorsque $\lambda < 0$, f_λ est strictement décroissante et, de façon analogue,

$$f_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad f_\lambda(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Lorsque $\lambda = 0$, f_λ est constante en $\frac{1}{2}$ et

$$f_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f_\lambda(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{e^{-\frac{\lambda x}{2}}\left(e^{\frac{\lambda x}{2}}+e^{-\frac{\lambda x}{2}}\right)} = \frac{1}{e^{-\frac{\lambda x}{2}}\left(e^{\frac{\lambda x}{2}}+e^{-\frac{\lambda x}{2}}\right)} = \frac{e^{\frac{\lambda x}{2}}}{e^{\frac{\lambda x}{2}}+e^{-\frac{\lambda x}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\lambda x}{2}}+e^{-\frac{\lambda x}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\lambda x}{2}}-e^{-\frac{\lambda x}{2}}\right)}{e^{\frac{\lambda x}{2}}+e^{-\frac{\lambda x}{2}}}$$

   qui donne

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{\lambda x}{2}}-e^{-\frac{\lambda x}{2}}}{e^{\frac{\lambda x}{2}}+e^{-\frac{\lambda x}{2}}}.$$

   En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\text{th}\left(\frac{\lambda x}{2}\right)$.

Équation différentielle

9. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On pose $g = \frac{1}{f}-1$. On a les équivalences (les égalités entre fonctions étant valables sur $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} f' = \lambda f(1-f) \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{f'}{f^2} = \frac{\lambda f(1-f)}{f^2} \\ \frac{1}{f(0)} = 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -\frac{f'}{f^2}+\lambda\left(\frac{1}{f}-1\right) = 0 \\ \frac{1}{f(0)}-1 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \left(\frac{1}{f}-1\right)'+\lambda\left(\frac{1}{f}-1\right) = 0 \\ \frac{1}{f(0)}-1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} g'+\lambda g = 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

En conclusion, f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E').

10. Procédons par double implication.

    Supposons que g est la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$. Dans ce cas, $g(0) = 1$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' : x \mapsto -\lambda e^{\lambda x}$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

    $$g'(x) + \lambda g(x) = -\lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} = 0.$$

    Par suite, g est solution de l'équation (E').

    Supposons que g est une solution de l'équation (E'). On pose $h : x \mapsto e^{\lambda x} g(x)$. Par produit, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

    $$h'(x) = e^{\lambda x} g'(x) + \lambda e^{\lambda x} g(x) = e^{\lambda x}\big(g'(x) + \lambda g(x)\big) = 0.$$

    Ainsi, h est constante sur $\mathbb{R}$ et comme $h(0) = 1 \times g(0) = 1$, h est constante en 1 sur $\mathbb{R}$. On obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda x} g(x) = 1$ c'est-à-dire $g(x) = e^{-\lambda x}$. Par suite, g est la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$.

    En conclusion, g est solution de l'équation (E') si et seulement si g est la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$.

11. Avec la question 7, une fonction f est solution de (E) si et seulement si $\frac{1}{f} - 1$ est une solution de (E') puis, avec la question 8, une fonction f est solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

    $$\frac{1}{f(x)} - 1 = e^{-\lambda x}$$

    ce qui s'écrit $\frac{1}{f(x)} = 1 + e^{-\lambda x}$ puis

    $$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}.$$

    En conclusion, l'équation (E) possède une unique solution donnée par :

    $$f : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}.$$

E

E’

E