PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante à l'intérieur de chaque exercice.

Durée : 3h

Calculatrice interdite

Bon courage !

Vous laisserez une marge en haut sur la première page pour les annotations.
Cet énoncé comporte une partie question de cours et 4 exercices indépendants.

Questions de cours

1. Donner les ensembles de dérivabilité ainsi que les dérivées des fonctions exp, ln et racine carrée.
2. Énoncer sans démonstration l'inégalité triangulaire pour deux réels x et y.
3. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et la valeur de la dérivée de la fonction arcsin.

Exercice 1 : Une étude de fonction

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{2-\cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté $\mathscr{D}(f)$, et la parité de f.
2. Montrer que f est 2π-périodique.
3. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition, exprimer sa dérivée et montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$ (on pourra utiliser la formule pour $\cos^2 + \sin^2 = \cdots$).
4. En déduire le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
5. Justifier que f est une fonction bornée sur $\mathscr{D}(f)$.

Exercice 2 : Fonction $\arccos \circ \cos$

On considère la fonction $f : x \mapsto \arccos\big(\cos x\big)$.

1. Rappeler les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. En déduire la valeur de $f(-\frac{\pi}{4})$ (attention : $-\frac{\pi}{4} \notin [0,\pi]$).
2. Quel est l'ensemble de définition de f (on justifiera la réponse) ?
3. Déterminer la parité de f.
4. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ (on utilisera notamment la question précédente).
5. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(x) = ax+b$ où a, b sont à déterminer.
6. Représenter sur un graphique, en justifiant la construction à l'aide des questions précédentes, la courbe représentative de la fonction f.
7. Déterminer le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de sa dérivée sur son domaine de dérivabilité.

Exercice 3 : Une simplification

1. Justifier que $f : x \mapsto x^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on notera $g : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ l'application réciproque de f et on pose

$$a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = g(20+14\sqrt{2}) + g(20-14\sqrt{2}).$$

2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$.
3. Déduire de la question précédente que $a^3 = 40+6a$.
4. Déterminer trois réels $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3-6x-40 = (x-4)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$.
5. Justifier que $x \mapsto x^2+4x+10$ est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$.
6. Avec la question précédente, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x^3-6x-40 = 0$.
7. Montrer que $a = 4$.

Exercice 4 : Fonctions sigmoïdes

Fonction tangente hyperbolique
On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Justifier que th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée (on simplifiera au maximum l'expression de sa dérivée). Déterminer également la parité de th.
2. Déterminer le signe de la dérivée, calculer les limites de th en $+\infty$ et $-\infty$, dresser le tableau des variations de th et tracer une allure de la courbe représentative de th.
3. Justifier que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble qu'on déterminera.
4. Montrer que la fonction réciproque de la bijection de la question précédente, notée th^{-1}, vérifie l'égalité, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\mathrm{th}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
5. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de th^{-1}.

Fonction sigmoïde
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre **fixé**. On définit la fonction f_λ, pour les réels x pour lesquels cela est possible, par

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{1+e^{-\lambda x}}.$$

6. Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f_λ et calculer sa dérivée.
7. En déduire la monotonie de f_λ et calculer les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$ (on distinguera trois cas).
8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{\lambda x}{2}\right).$$

Équation différentielle
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle équation différentielle une équation faisant intervenir une fonction et ses dérivées et dont les éventuelles solutions sont des **fonctions**. Le but de cette partie est de résoudre l'équation différentielle d'inconnue f avec une condition initiale :

$$f' = \lambda f(1-f) \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{1}{2}. \tag{E}$$

On admettra qu'une solution de cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

9. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On pose $g = \frac{1}{f} - 1$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de
$$g' + \lambda g = 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 1. \tag{E'}$$
10. Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si g est la fonction
$$x \mapsto e^{-\lambda x}.$$
On pourra étudier la fonction $h : x \mapsto e^{\lambda x} g(x)$.
11. À l'aide de la partie précédente, résoudre complètement l'équation (E).

Les fonctions sigmoïdes modélisent l'évolution du pH en fonction de la quantité de solution introduite dans le mélange lors d'un titrage acido-basique que vous verrez au cours de l'année en chimie.