Corrigé DS 1 — 10/09/2016

Exercice 1 : Une limite

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$ qui est du signe de x. On a $f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$ ce qui donne le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   Ainsi, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ ce s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 1 - x \geq 0$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait, d'après la question précédente que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $1 + y \leq e^y$ ce qui donne en prenant en particulier $y = -x$, $1 - x \leq e^{-x}$. Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $1 - x, e^{-x} > 0$ donc on obtient avec l'inégalité précédente $\frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{1-x}$. Finalement, pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

3. Soit $x \in]-\infty, 1[$. Avec les deux inégalités précédentes, $x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ puis
$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-(1-x)}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

4. Pour tout $x \in]0, 1[$, comme $x > 0$, en divisant l'inégalité précédente par x,
$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}.$$
   Pour tout $x \in]-\infty, 0[$, comme $x < 0$, en divisant l'inégalité précédente par x,
$$1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{1-x}.$$

5. On sait que $\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$ donc par théorème d'encadrement, avec la premère inégalité de la question précédente,
$$\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$
   Le raisonnement précédent est également valable en remplaçant 0^+ par 0^-. La fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ admet donc les même limites en 0^+ et 0^-. En conclusion
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exercice 2 : Fonctions homographiques

1. La fonction f est un quotient de fonctions affines. Celle-ci est donc définie et continue lorsque son dénominateur ne s'annule pas. Finalement, f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Le numérateur et le dénominateur de f sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, le dénominateur de f ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
$$f'(x) = \frac{2(-x+2) - (2x-1)(-1)}{(-x+2)^2} = \frac{3}{(2-x)^2} > 0.$$
   Comme f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, f est strictement croissante sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.

3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{-1 + \frac{2}{x}}.$$

Or, $\frac{1}{x}, \frac{2}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $2x - 1 \underset{x \to 2^+}{\longrightarrow} 3$ et $-x + 2 \underset{x \to 2^+}{\longrightarrow} 0^-$ donc par opérations sur les limites, on a

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -2 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to 2^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

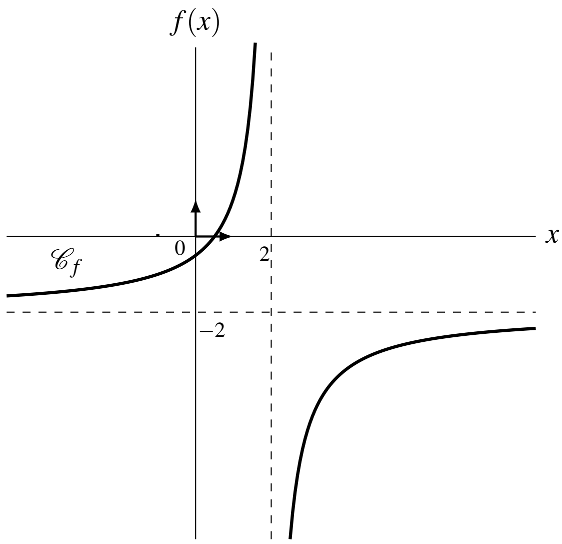
Par un raisonnement analogue,

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -2 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to 2^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

4. Avec les questions précédentes, on a le tableau de variations

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	-2

puis la représentation graphique



5. La fonction $f_{a,b,c,d}$ est un quotient de fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ donc $f_{a,b,c,d}$ est définie lorsque son dénominateur ne s'annule pas. Finalement, $f_{a,b,c,d}$ est définie sur $\mathscr{D}(f_{a,b,c,d}) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.
6. On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}, 0\right\}$,

$$f_{a,b,c,d}(x) = \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}.$$

Or, $\frac{b}{x}, \frac{d}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par opérations sur les limites, on a

$$f_{a,b,c,d}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{c}.$$

Par un raisonnement analogue,

$$f_{a,b,c,d}(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{c}.$$

7. La fonction $f_{a,b,c,d}$ est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$ donc $f_{a,b,c,d}$ est dérivable sur $\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$ et pour tout $x \in \mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$,

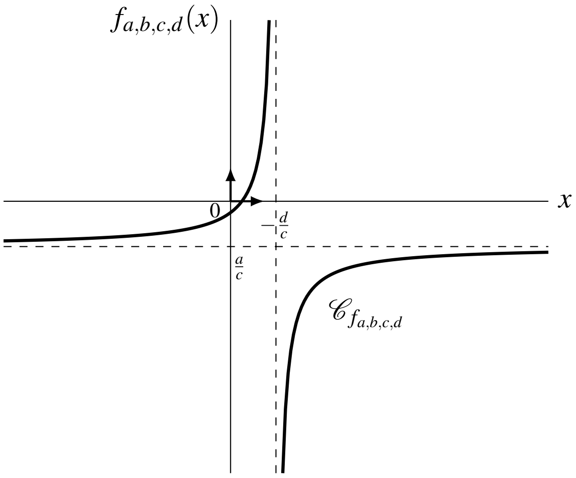
$$f'_{a,b,c,d}(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

Finalement, pour tout $x \in \mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$, $f'_{a,b,c,d}(x) = \frac{ad-bc}{g(x)}$ où $g : x \mapsto (cx+d)^2$.

8. La fonction g est strictement positive sur $\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$ donc lorsque $ad-bc>0$ (respectivement $ad-bc=0$, respectivement $ad-bc<0$), $f_{a,b,c,d}$ est strictement croissante (respectivement constante, respectivement strictement décroissante) sur $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$.
9. Dans le cas particulier où $ad-bc>0$, avec les questions précédentes, on a le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f'_{a,b,c,d}(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
$f_{a,b,c,d}(x)$	$\frac{a}{c} \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow \frac{a}{c}$

et, par conséquent, la courbe représentative suivante :



10. Soit $x\in\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$. On a les égalités :

$$f_{a,b,c,d}(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}\frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{a}{c}\frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}+\frac{a}{c}.$$

On pose $\alpha=\frac{bc-ad}{c^2}$, $\beta=-\frac{d}{c}$ et $\gamma=\frac{a}{c}$. On a l'égalité, pour tout $x\in\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$,

$$f_{a,b,c,d}(x)=\frac{\alpha}{x-\beta}+\gamma.$$

11. Notons $g : x\mapsto\frac{\alpha}{x}$. On a également l'égalité, pour tout $x\in\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$,

$$f_{a,b,c,d}(x)=g(x-\beta)+\gamma.$$

Ainsi, on obtient la représentation graphique de $f_{a,b,c,d}$ en translatant la courbe représentative de g par le vecteur de coordonnées $(\beta,\gamma)=\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$ et on retrouve la question 9.

12. On suppose que $ad-bc\neq 0$. Soit $y\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}$ et $x\in\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
y=f_{a,b,c,d}(x) &\iff y=\frac{ax+b}{cx+d}\\
&\iff y(cx+d)=ax+b\\
&\iff cyx+dy=ax+b\\
&\iff cyx-ax=b-dy\\
&\iff (cy-a)x=b-dy\\
&\iff x=\frac{b-dy}{cy-a}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence est justifiée car $cy-a\neq 0$.

13. On considère la fonction

$$g : x \mapsto \frac{b - dx}{cx - a}.$$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Soit $x \in \mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$. Posons $y = f_{a,b,c,d}(x)$. On a, avec les équivalence de la question précédente, $g \circ f_{a,b,c,d}(x) = g(y) = x$. En conclusion, pour tout $x \in \mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$, on a bien $g \circ f_{a,b,c,d}(x) = x$.

14. Soit $x \in \mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} = f_{a,b,c,d}(x) &\iff \frac{a}{c} = \frac{ax+b}{cx+d} \\ &\iff a(cx+d) = c(ax+b) \\ &\iff ad = bc \\ &\iff ad - bc = 0. \end{aligned}$$

Finalement, comme on a supposé que $ad - bc \neq 0$, l'équation d'inconnue $x \in \mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$: $\frac{a}{c} = f_{a,b,c,d}(x)$ n'a pas de solution.

Exercice 3 : Fonctions hyperboliques

1. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ donc par composition et somme, ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. On sait que $e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^{-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par opération sur les limites,

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \operatorname{sh} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

3. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition et somme, ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

De la même manière, sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$.

4. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc, comme somme de fonction strictement positives sur $\mathbb{R}$, ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
5. On a $\operatorname{sh}(0) = 0$. Avec la question précédente, on a le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$		$+$	
sh	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Ainsi, sh est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.

6. On a $\operatorname{ch}(0) = 1$. Avec les deux questions précédentes, on a le tableau :

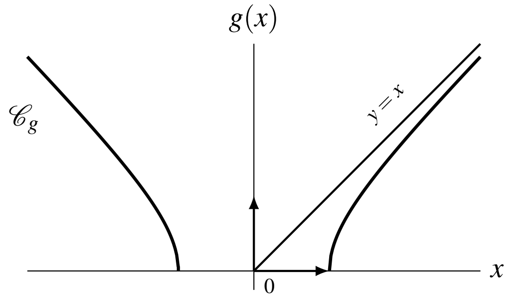
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

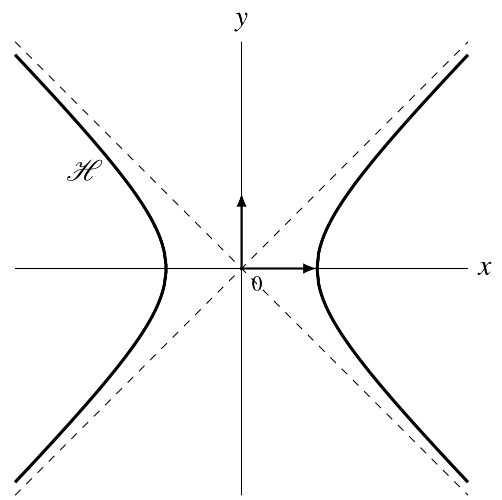
7. Soit $M \in \mathscr{H}$ de coordonnées (x_M, y_M). Par définition, on a $x_M^2 - y_M^2 = 1$. Ainsi, on a $(-x_M)^2 - y_M^2 = 1$ et $x_M^2 - (-y_M)^2 = 1$ donc les points de coordonnées $(-x_M, y_M)$ et $(x_M, -y_M)$ sont également des éléments de $\mathscr{H}$. Finalement, $\mathscr{H}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées.

8. La fonction polynomiale $x \mapsto x^2 - 1$ s'annule en 1 et en -1 donc on a le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

9. La fonction $\sqrt{\ }$ est définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. Ainsi, lorsque $x \in \mathbb{R}$, g est définie en x lorsque $x^2 - 1 \geq 0$ et dérivable en x lorsque $x^2 - 1 > 0$.
Finalement, avec le tableau de signe de la question précédente, g est définie sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$,
$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$
10. Le domaine de définition de g est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$,
$$g(-x) = \sqrt{(-x)^2-1} = \sqrt{x^2-1} = g(x).$$
En conclusion, g est une fonction paire.
11. On a pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$\frac{g(x)}{x} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \quad \text{et} \quad g(x)-x = \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.$$
Ainsi, comme $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\sqrt{x^2-1}+x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par opérations sur les limites ,
$$\frac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad g(x)-x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ces limites signifient que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe de g en $+\infty$.
12. Avec la question 9, on sait que g est une fonction strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et, par opérations sur les limites $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La question 10 justifie que $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et la question 11 donne une asymptote en $+\infty$. Pour tout $y \in [0,+\infty[$, $x \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence
$$x^2 - y^2 = 1 \Longleftrightarrow y = \sqrt{x^2-1} = g(x).$$
Ainsi, l'ensemble $\mathscr{H}$ est constitué de la courbe représentative de g complétée par le symétrique de cette courbe par rapport à l'axe des abscisses. On obtient finalement les représentations :





13. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(t)^2 - \mathrm{sh}(t)^2 = \frac{1}{4}\Big((e^t)^2 + 2e^t e^{-t} + (e^{-t})^2 - \big((e^t)^2 - 2e^t e^{-t} + (e^{-t})^2\big)\Big) = \frac{4}{4} = 1.$$

En conclusion, pour tout point M de coordonnées $\big(\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t)\big)$ où $t \in \mathbb{R}$, $M \in \mathscr{H}$.

14. Soit $M \in \mathscr{H}$ d'abscisse positive. Notons (x_M, y_M) les coordonnées de M. Par définition, on a $x_M^2 - y_M^2 = 1$ et $x_M \geq 0$. D'après le tableau de variations de la fonction sh (qui est strictement croissante) et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel t_M tel que $y_M = \mathrm{sh}(t_M)$. Dans ce cas, on a, comme $x_M \geq 0$,

$$x_M = \sqrt{1 + y_M^2} = \sqrt{\mathrm{ch}(t_M)^2 - \mathrm{sh}(t_M)^2 + \mathrm{sh}(t_M)^2} = \sqrt{\mathrm{ch}(t_M)^2} = \mathrm{ch}(t_M)$$

car la fonction ch est positive sur $\mathbb{R}$. Finalement, M a pour coordonnées $\big(\mathrm{ch}(t_M), \mathrm{sh}(t_M)\big)$ et le réel t_M est unique.