PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante à l'intérieur de chaque exercice.

Durée : 3h

Calculatrice interdite

Bon courage !

Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations. Cet énoncé comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1 : Une limite

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence et calculer la valeur de

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

1. En dressant le tableau des variations de la fonction f, définie pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = e^x - 1 - x$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$1 + x \leq e^x.$$
On utilisera notamment la valeur de $f(0)$.
2. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. Montrer avec 1. que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leq e^{-x}$ puis que, pour $x \in]-\infty, 1[$:
$$e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$
3. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $x \leq e^x - 1 \leq \dfrac{x}{1-x}$.
4. En déduire un encadrement, pour $x \in]0, 1[$ puis pour $x \in]-\infty, 0[$ de $\dfrac{e^x - 1}{x}$.
5. Conclure quant à l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Exercice 2 : Fonctions homographiques

On étudie d'abord un premier exemple dans les questions 1 à 4 avant de traiter un cas plus général dans les questions suivantes. On définit la fonction f, pour les réels x pour lesquels cela est possible, par :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{-x + 2}.$$

1. Justifier que $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ est l'ensemble de définition de f. Sur quel ensemble f est-elle continue ?
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et calculer sa dérivée. En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$, 2^- et 2^+.
4. Dresser finalement le tableau des variations de f et tracer sa courbe représentative.

On traite désormais le cas général d'une fonction homographique. On considère, pour les réels x pour lesquels cette quantité est bien définie,

$$f_{a,b,c,d}(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

où a, b, c, d sont des réels fixés et $c \neq 0$ (on remarquera que la fonction f étudiée précédemment est un cas particulier de la fonction $f_{a,b,c,d}$ avec $a = 2, b = -1, c = -1, d = 2$).

5. Déterminer le domaine de définition, noté $\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$, de $f_{a,b,c,d}$ en fonction de c et d.
6. Déterminer les limites de $f_{a,b,c,d}$ en $-\infty$ et en $+\infty$ en fonction de a, b, c, d.
7. Justifier que $f_{a,b,c,d}$ est dérivable sur son domaine de définition et montrer que sa dérivée est de la forme : pour tout $x \in \mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$,
$$f'_{a,b,c,d}(x) = \frac{ad - bc}{g(x)}$$
où g est une fonction que l'on explicitera.
8. Déterminer la monotonie de $f_{a,b,c,d}$ (on distinguera trois cas).

9. On considérant le cas particulier $ad-bc>0$, dresser le tableau des variations de $f_{a,b,c,d}$ et tracer l'allure de la courbe de $f_{a,b,c,d}$ (on écrira toutes les limites dans le tableau et on placera des points particuliers qui dépendent de a,b,c,d sur la courbe).
10. Montrer qu'il existe α,β,γ (qu'on exprimera en fonction de a,b,c,d) tel que, pour tout $x\in\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$,
$$f_{a,b,c,d}(x)=\frac{\alpha}{x-\beta}+\gamma.$$
11. En supposant connue la représentation graphique de la fonction $x\mapsto\frac{\alpha}{x}$ (où α est le réel déterminé dans la question précédente), comment retrouve-t-on la représentation graphique de la question 9 ?
12. Dans toute la fin de l'exercice, on suppose que $ad-bc\neq 0$. Soit $y\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{a}{c}\}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$: $y=f_{a,b,c,d}(x)$ (on exprimera x en fonction de y).
13. EN déduire qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}$ tel que pour tout $x\in\mathscr{D}(f_{a,b,c,d})$:
$$g\circ f_{a,b,c,d}(x)=x.$$
14. Peut-on refaire la question 12 lorsque $y=\frac{a}{c}$?

Exercice 3 : Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions, pour les réels x pour lesquels cela est possible,
$$\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad\text{et}\quad\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
ainsi que $g(x)=\sqrt{x^2-1}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de ch et sh.
2. Déterminer les limites de ch et de sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Exprimer les dérivées de ch et de sh en fonction de ch et de sh.
4. Quel est le signe de la fonction ch ?
5. Donner la valeur de $\operatorname{sh}(0)$. En déduire le tableau des variations de sh ainsi que son signe (on indiquera les limites dans le tableau).
6. Construire également le tableau des variations de ch.

On considère $\mathscr{H}$, l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x_M,y_M) vérifiant :
$$x_M^2-y_M^2=1. \tag{1}$$

7. Montrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et des ordonnées.
8. Étudier le signe de x^2-1 en fonction de $x\in\mathbb{R}$.
9. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de g et calculer sa dérivée.
10. Déterminer la parité de g.
11. Montrer que $x\mapsto\dfrac{g(x)}{x}$ et $x\mapsto g(x)-x$ admettent des limites en $+\infty$ que l'on calculera. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g ?
12. Tracer $\mathscr{C}_g$ et, à l'aide de cette courbe, représenter, en justifiant, l'ensemble $\mathscr{H}$.
13. Soit $t\in\mathbb{R}$. Montrer que si M a pour coordonnées $(\operatorname{ch}(t),\operatorname{sh}(t))$, alors $M\in\mathscr{H}$ (utiliser l'équation 1).
14. Montrer que pour tout point M de $\mathscr{H}$ d'abscisse positive, il existe $t_M\in\mathbb{R}$ tel que M a pour coordonnées $(\operatorname{ch}(t_M),\operatorname{sh}(t_M))$. Ce réel t_M est-il unique ?
