DM9

Ce devoir est à rendre pour le mardi 11 décembre à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM9.1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$$
et $v_n = (n+1)u_n^2$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On pourra étudier la quantité, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1}/v_n - 1$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice DM9.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right).$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
3. En déduire une expression de v_n en fonction de n. On commencera par conjecturer le résultat avant de le montrer par récurrence.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{5} \times \dfrac{1 + v_0^{2^n}}{1 - v_0^{2^n}}$.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Dans toute la suite, on suppose que $u_0 = 2$.

6. Calculer v_0, et montrer $|v_0| \leqslant \dfrac{1}{17}$.
7. Calculer v_1 puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{1-v_n} \leqslant \dfrac{1}{1-v_1} < \dfrac{19\sqrt{5}}{40}$.
8. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n - \sqrt{5} < \dfrac{19}{4}\left(\dfrac{1}{17}\right)^{2^n}$.
9. En déduire un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, u_n soit une approximation de $\sqrt{5}$ à 10^{-5} près.