Exercice 1 Hyperplans

1. (a) On a clairement $V \subset \mathbb{R}^3$ et comme $0 = 0 = 0$, $(0,0,0) \in V$ donc $V \neq \emptyset$. Soit $(x,y,z),(x',y',z') \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda(x,y,z)+(x',y',z') = (\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z')$ et, comme $x = y = z$ et $x' = y' = z'$,

$$\lambda x + x' = \lambda y + y' = \lambda z + z'$$

donc $\lambda(x,y,z)+(x',y',z') \in V$.

Finalement, V est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De façon analogue, W est un espace vectoriel.

(b) On a
$$V = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$$
donc $\big((1,1,1)\big)$ est une famille génératrice de V qui est également libre car $(1,1,1) \neq (0,0,0)$. Ainsi, $\big((1,1,1)\big)$ est une base de V. De la même manière, $\big((-1,1,0),(0,1,-1)\big)$ est une base de W.

(c) Soit $(x,y,z) \in V \cap W$. On a $x = y = z$ et $x+y+z = 0$ donc $3x = 0$ puis $x = y = z = 0$ c'est-à-dire $(x,y,z) = (0,0,0)$. Par suite, $V \cap W = \{(0,0,0)\}$. Par définition, on a donc $V+W = V \oplus W$. De plus, $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W = 1+2 = 3$ grâce aux bases déterminées précédemment.

(d) Avec les question précédentes, $V \oplus W$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 donc

$$V \oplus W = \mathbb{R}^3.$$

2. (a) On a
$$V = \{(x_1,\dots,x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,\dots,1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((1,\dots,1)\big)$$
donc V est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ dont $\big((1,\dots,1)\big)$ est une famille génératrice et, comme $(1,\dots,1) \neq (0,\dots,0)$, $\big((1,\dots,1)\big)$ est une famille libre de V. Finalement $\big((1,\dots,1)\big)$ est une base de V qui est ainsi de dimension 1.

(b) On a

$$\begin{aligned} W &= \{(-x_2-x_3-\cdots-x_n, x_2\dots,x_n) \mid x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2(-1,1,0,\dots,0)+x_3(-1,0,1,0,\dots,0)+\cdots+x_n(-1,0,\dots,1) \mid x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2w_1+\cdots+x_nw_{n-1} \mid x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

donc $W = \mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_{n-1})$. Par suite, W est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ dont $(w_1,\dots,w_{n-1})$ est une famille génératrice. Montrons que cette famille est libre. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{n-1} w_{n-1} = (0,\dots,0).$$

On obtient le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} -\lambda_1-\cdots-\lambda_{n-1} &=& 0 \\ \lambda_1 &=& 0 \\ &\vdots& \\ \lambda_{n-1} &=& 0 \end{array}\right.$$
donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. Par suite, $(w_1,\dots,w_{n-1})$ est une famille libre de W. Finalement, $(w_1,\dots,w_{n-1})$ est une base de W.

(c) Déterminons $V \cap W$. Soit $(x_1,\dots,x_n) \in W$. On a $x_1 = \cdots = x_n$ et $x_1+\cdots+x_n = 0$ donc $nx_1 = 0$ puis $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Par suite $V \cap W = \{(0,\dots,0)\}$. De plus, avec les deux questions précédentes, $\dim V + \dim W = 1+n-1 = n = \dim \mathbb{R}^n$. En conclusion, $\mathbb{R}^n = V \oplus W$.

Exercice 2 Une application linéaire.

1. Soit $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f\big((x,y,z)+\alpha(x',y',z')\big) &= f\big((x+\alpha x', y+\alpha y', z+\alpha z')\big) \\ &= \big((x+\alpha x')+(z+\alpha z'), (y+\alpha y')-2(x+\alpha x'), (x+\alpha x')+3(z+\alpha z')\big) \\ &= \big(x+z, y-2x, x+3z\big)+\alpha\big(x'+z', y'-2x', x'+3z'\big) \\ &= f\big((x,y,z)\big)+\alpha f\big((x',y',z')\big) \end{aligned}$$

   donc f est une application linéaire.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker f &\iff f\big((x,y,z)\big) = (0,0,0) \\ &\iff (x+z, y-2x, x+3z) = (0,0,0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ y-2x &=& 0 \\ x+3z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ y+2z &=& 0 \\ 2z &=& 0 \end{array} \right. \iff (x,y,z) = (0,0,0) \end{aligned}$$

   donc $\ker f = \{(0,0,0)\}$.
3. Comme $\dim(\ker f) = 0$, avec le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$ donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
4. Avec les deux questions précédentes, f est à la fois injective et surjective donc bijective.

Exercice 3 Polynômes de Lagrange

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\lambda P+Q) &=& \big((\lambda P+Q)(a_0),\dots,(\lambda P+Q)(a_n)\big) \\ &=& \big(\lambda P(a_0)+Q(a_0),\dots,\lambda P(a_n)+Q(a_n)\big) \\ &=& \lambda\big(P(a_0),\dots,P(a_n)\big)+\big(Q(a_0),\dots,Q(a_n)\big) \end{array}$$

   donc $\varphi(\lambda P+Q) = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$. Finalement, $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R}^{n+1})$.
2. On a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n+1$.
3. Un polynôme de degré au plus n et possédant $n+1$ racines distinctes est nul. Soit $P \in \ker(\varphi)$. On a $\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow (P(a_0),\dots,P(a_n)) = (0,\dots,0)$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, P possède au moins $n+1$ racines $(a_0,\dots,a_n)$ et est de degré au plus n donc $P = 0$. Par suite, $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective.
4. L'application φ est linéaire et injective entre deux espaces de même dimension $n+1$ donc elle est bijective : φ est un isomorphisme.
5. Par définition de la bijectivité de φ, pour tout $(b_0,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P tel que $\varphi(P) = (b_0,\dots,b_n)$ c'est-à-dire : pour tout $i = 0,\dots,n$, $P(a_i) = b_i$.
6. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Par définition de L_i, L_i est de degré n a pour racines a_j lorsque $j = 0,\dots,n$, $j \neq i$.
7. Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(X) = 0.$$

   On considère $j \in\in [\![0,n]\!]$. On a

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \underbrace{L_i(a_j)}_{=0 \text{ si } i\neq j} = \lambda_j \underbrace{L_j(a_j)}_{=1} = \lambda_j$$

   donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Par suite, $(L_0,\dots,L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ qui possède $n+1$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On a, avec les calculs précédents,

$$\varphi(L_i) = \big(L_i(a_0), \dots, L_i(a_n)\big) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ème position}}, 0, \dots, 0)$$

donc $\big(\varphi(L_0), \dots, \varphi(L_n)\big)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ceci prouve à nouveau que φ est un isomorphisme.

Exercice 4 Polynômes à coefficients entiers

1. La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille a degré échelonnés de $\mathbb{R}_n[X]$ donc celle-ci est une famille libre à $n+1 = \dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$: c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$. Si $0 \leqslant x \leqslant k-1$, $P_k(x) = 0 \in \mathbb{Z}$. Si $x > k$, on a

$$P_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\frac{1 \times 2 \times \cdots \times (x-k) \times (x-k+1) \times \cdots \times x}{1 \times 2 \times \cdots \times (x-k)} = \frac{x!}{(x-k)!k!} = \binom{x}{k} \in \mathbb{Z}.$$

   Si $x < 0$, $-x > 0$ et on a , de façon analogue au cas précédent

$$P_k(x) = (-1)^k \binom{-x+k-1}{k} \in \mathbb{Z}.$$

   Dans tous les cas, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{N}, P_k(x) \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Notons $n = \deg P \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. En appliquant l'exercice précédent, avec $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = n$ (avec les notations précédentes, $L_i = P_i$, pour $i = 0, \dots, n$), il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tel que

$$P = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n.$$

   Ainsi, si pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $P(x) \in \mathbb{Z}$, en particulier pour $x = 0, 1, \dots, n$, on obtient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, si $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$P(x) = \underbrace{\lambda_0}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{P_0(x)}_{\in\mathbb{Z}} + \cdots + \underbrace{\lambda_n}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{P_n(x)}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}.$$

   En conclusion, les polynômes P vérifiant pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $P(x) \in \mathbb{Z}$ sont les combinaisons linéaires **à coefficients entiers** de $P_0, \dots, P_k, \dots$.
