DM8

Ce devoir est à rendre pour le mardi 27 novembre à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM8.1

Dans tout l'exercice, on considère un ensemble E et deux parties A, B de E fixées. On définit l'application ϕ suivante :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & (A \cap X) \cup (B \cap (E \setminus X)) \end{array} \right.$$

1. Déterminer $\phi(\emptyset)$ et $\phi(E)$.
2. Dans cette question, on suppose que $B = E \setminus A$.
   (a) Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Déterminer
   $$A \cap \phi(X), \quad (E \setminus A) \cap (E \setminus \phi(X)) \quad \text{puis} \quad \phi(\phi(X)).$$
   (b) Montrer que ϕ est bijective et donner sa bijection réciproque.

On ne suppose plus que $B = E \setminus A$.

3. (a) Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que :
   $$\phi(X) = \emptyset \Longleftrightarrow B \subseteq X \subseteq (E \setminus A).$$
   (b) En déduire que si ϕ est surjective alors $B \subseteq (E \setminus A)$.
4. Dans cette question, on suppose que $B \subseteq (E \setminus A)$.
   (a) On suppose que B et $(E \setminus A) \setminus B$ sont non vides ; soit $b \in B$ et $x \in (E \setminus A) \setminus B$. Calculer
   $$\phi(\{b\}) \qquad \text{et} \qquad \phi(\{b, x\}).$$
   (b) Montrer que si ϕ est injective, alors $(E \setminus A) \subseteq B$.
5. Que peut-on déduire des questions précédentes ?

Exercice DM8.2

On considère l'équation différentielle suivante sur $[0, \pi]$ (où la fonction inconnue est noté y et la variable x) :

$$(\cos x)y' - y = \pi \tag{E}$$

1. Déterminer une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1 - t^2}$ sur un ensemble que l'on précisera.
2. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;
   (b) $\displaystyle\int_\pi^t \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ pour $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
   On pourra, dans les deux cas, poser $y = \sin x$.
3. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (E) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puis faire de même sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (on désignera par deux lettres distinctes les constantes qui apparaissent dans chaque cas).
4. Déterminer une solution particulière simple de (E) sur $[0, \pi]$.
5. Donner toutes les solutions de (E) définie sur $[0, \pi]$.