Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires et le 4 facultatif pour la majorité de la classe. En revanche, pour les élèves prévenus, l'exercice 2 est facultatif mais les exercices 1,3 et 4 sont obligatoires.

Rédigez et **justifiez** toutes vos réponses.

Exercice 1 Hyperplans

1. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$.
   (a) Justifier que $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$ et $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer des bases de V et de W.
   (c) Montrer que $V+W=V\oplus W$. Quelle est la dimension de $V\oplus W$?
   (d) Conclure que $\mathbb{R}^3=V\oplus W$.
2. On se place désormais dans $\mathbb{R}^n$ et on considère

$$V=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1=\cdots=x_n\} \quad \text{et} \quad W=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1+\cdots+x_n=0\}.$$

   (a) Montrer que V est de dimension 1 en montrant que $V=\operatorname{Vect}\big((1,\dots,1)\big)$.
   (b) Montrer que les vecteurs $w_1=(-1,1,0,\dots,0)$, $w_2=(-1,0,1,0,\dots,0)$, …, $w_{n-1}=(-1,0,\dots,1)$ forment une base de W. Quelle est la dimension de W ?
   (c) Conclure que $\mathbb{R}^n=V\oplus W$.

Remarque : De façon générale, on appelle W un hyperplan car c'est un espace de dimension $n-1$ dans un espace de dimension n.

Exercice 2 Une application linéaire.

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$ et l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y-2x,x+3z) \end{array}.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Déterminer une base de l'image de f.
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3 Polynômes de Lagrange

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ des réels **distincts**. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & \big(P(a_0),\dots,P(a_n)\big) \end{array}.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Que valent les dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}^{n+1}$?
3. Quel est le seul polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ racines distinctes ? En déduire que $\ker(\varphi)=\{0\}$.
4. En déduire que φ est un isomorphisme.
5. Conclure que pour tous $b_0,\dots,b_n\in\mathbb{R}$, il existe un unique polynôme P tel que pour tout $i=0,\dots,n$,

$$P(a_i)=b_i.$$

On considère les polynômes, pour $i \in [\![0,n]\!]$:

$$L_i(X) = \frac{\displaystyle\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (a_i - a_j)}.$$

6. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Quels sont le degré de L_i et les racines de L_i ?
7. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille libre (on pourra considérer une combinaison linéaire des L_i qui s'annule puis évaluer en a_i). En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. Calculer, pour $i \in [\![0,n]\!]$, $\varphi(L_i)$. En déduire une autre démonstration du fait que φ est un isomorphisme.

Exercice 4 Polynômes à coefficients entiers

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

1. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, P_k(x) \in \mathbb{Z}$$

3. Trouver tous les polynômes P tels que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$$
