Exercice 1 *Factorisation*

1. Les racines de X^4-1 sont les racines quatrièmes de l'unité $1, i, -1, -i$ donc
$$X^4-1=(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$$
qui est sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et
$$X^4-1=(X-1)(X+1)(X^2+1)$$
qui est sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. Un complexe z est racine de X^3-1 si seulement si $z^3=-1$, c'est-à-dire $(-z)^3=1$. Ainsi les racines de X^3+1 sont -1, $-e^{i\frac{2i\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-e^{i\frac{2i\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Par suite, on a
$$X^3+1=(X+1)\left(X-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
qui est sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et
$$X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$$
qui est sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Les racines complexes $z\in\mathbb{C}$ du polynôme de degré $2n+1$ $X^{2n+1}+1$ vérifient $z^{2n+1}=-1$ c'est-à-dire $(z^{2n+1}/e^{i\pi/(2n+1)})=1$ donc les racines de $X^{2n+1}+1$ sont, pour $k\in[\![0,2n]\!]$, les
$$z_k=e^{\frac{i\pi}{2n+1}\pi}e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}\pi}=e^{i\pi}e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}\pi+\frac{i\pi}{2n+1}}=e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}.$$
3. La question précédente fournit une expression de racines de $X^{2n+1}+1$ ce qui donne
$$X^{2n+1}+1=\prod_{k=0}^{2n}(X-z_k)=\prod_{k=0}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right).$$
On a obtenu la factorisation de $X^{2n+1}+1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
4. On a
$$\begin{aligned}X^{2n+1}+1&=\prod_{k=0}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\\&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\prod_{k=n}^{n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\prod_{k=n+1}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\\&=\underbrace{\left(X-e^{i\frac{2n+1}{2n+1}\pi}\right)}_{=X+1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\prod_{k=n+1}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\end{aligned}$$
Or, en faisant le changement d'indice $j=2n-k\iff k=2n-j$, on a
$$\prod_{k=n+1}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)=\prod_{j=0}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2(2n-j)+1}{2n+1}\pi}\right)=\prod_{j=0}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{(4n+2)-(2j+1)}{2n+1}\pi}\right)=\prod_{j=0}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{-(2j+1)}{2n+1}\pi}\right).$$
Comme la lettre j du dernier produit est une lettre muette, on obtient
$$\begin{aligned}X^{2n+1}+1&=(X+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\prod_{k=n}^{n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\prod_{k=n+1}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{-(2k+1)}{2n+1}\pi}\right)\\&=(X+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right)\left(X-e^{i\frac{-(2k+1)}{2n+1}\pi}\right)\end{aligned}$$
ce qui donne
$$X^{2n+1}+1=(X+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)+1\right)$$
qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^{2n+1}+1$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le raisonnement est analogue au cas précédent et on donne les étapes principales. On a

$$\begin{aligned}
X^{2n+1}+1 &= \prod_{k=1}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}\right)\prod_{k=n+1}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}\right) \qquad\qquad = \prod_{k=1}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(X-e^{-i\frac{2k+1}{2n}\pi}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}\right)\left(X-e^{-i\frac{2k+1}{2n}\pi}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$X^{2n}+1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)X+1\right)$$

qui est bien une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ car les polynômes de degré 2 du produit sont à discriminant <0 et sont donc irréductibles (pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $4\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)^2-4<0$).

Exercice 2 *Fonction définie par une intégrale*

1. Comme ln ne s'annule pas sur $]0,1[$, $\frac{1}{\ln}$ est continue sur $]0,1[$. De plus, lorsque $x \in]0,1[$, on a $x^2 \in]0,1[$ puis $[x^2,x] \subset]0,1[$. Finalement, φ est bien définie sur $]0,1[$.
2. Soit $x \in]0,1[$. On a, pour tout $t \in [x^2,x]$, $\ln t < 0$ donc

$$\frac{x^2}{\ln t} \geq \frac{t}{\ln t} \geq \frac{x}{\ln t} \quad \text{puis} \quad \frac{x^2}{t\ln t} \geq \frac{1}{\ln t} \geq \frac{x}{t\ln t}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[x^2,x]$ puis en inversant les bornes, puisque $x^2<x$, on obtient

$$\int_x^{x^2}\frac{x^2}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{x^2}\frac{x}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\int_x^{x^2}\frac{x^2}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \leq \varphi(x) \leq \int_x^{x^2}\frac{x}{t\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

3. Comme ln ne s'annule pas sur $]0,1[$, $\frac{1}{\ln}$ est continue sur $]0,1[$ et admet donc une primitive de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ qu'on note F. De plus, lorsque $x \in]0,1[$, on a $x^2 \in]0,1[$ puis $[x^2,x] \subset]0,1[$. Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, on peut écrire :

$$\varphi(x) = F(x^2)-F(x).$$

Finalement, par composition, φ et définie de classe $\mathscr{C}^1$ (donc dérivable) sur $]0,1[$ et on a, pour tout réel $x \in]0,1[$:

$$\varphi'(x) = 2xF'(x^2)-F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)}-\frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2\ln x}-\frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Exercice 2 :

1) On prend $n \geqslant 2$ car si $n=1$, P' est de degré 0 et ne possède pas de racine.

On $x \mapsto P(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. En particulier, comme P est à racines simples $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ et P est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. De plus $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) = 0$ donc, par le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $P'(\beta_i) = 0$.

On a donc : $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1}$. Par suite, comme P' est de degré $n-1$, il possède au plus $n-1$ racines distinctes qui sont exactement $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$

Finalement <u>P' est scindé et à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.</u>

2) Par caractérisation des racines multiples et comme $(P^2+1)' = 2PP'$, si α est une racine d'ordre 2 de P^2+1, on a $P^2(\alpha)+1=0$ et $2P(\alpha)P'(\alpha)=0$ c'est-à-dire :

$$\boxed{P^2(\alpha) + 1 = 0 \text{ et } P(\alpha)P'(\alpha) = 0}$$

3) Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, si α est une racine réelle de P^2+1, $P^2(\alpha)+1=0$ mais $P(\alpha) \in \mathbb{R}$ donc $P^2(\alpha)+1 > 0$. Ceci constitue une contradiction donc <u>les racines de P^2+1 ne sont pas réelles.</u>

4) Supposons que α est une racine double au moins de P^2+1.

α ne peut être réelle par la question précédente donc $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (racine complexe non réelle)

Par la question 2, on a $P(\alpha)P'(\alpha) = 0$.

Toutes les racines de P sont réelles car P est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ donc comme α n'est pas réelle $P(\alpha) = 0$. Ainsi $P'(\alpha) = 0$. Mais ceci est également impossible car, par la question 1, P' est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ donc n'admet que des racines réelles donc $P'(\alpha) \neq 0$ ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). Ceci constitue une contradiction.

En conclusion P^2+1 n'a pas de racine double dans $\mathbb{C}[X]$ et comme tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, <u>P^2+1 est scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.</u>

Exercice 3 *Théorème de Darboux*

1. Si $f'(a) = f'(b)$, il suffirait de prendre $c = a$ ou $c = b$. Si $f'(a) > f'(b)$, il suffit d'appliquer ce qu'on démontre plus loin à $-f$ et $-y$.
2. Les fonctions φ et ψ sont continues respectivement sur $]a,b]$ et sur $[a,b[$ car f est dérivable sur $[a,b]$ donc continue sur $[a,b]$. De plus, comme f est dérivable en a et b :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} f'(a) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} f'(b)$$

   donc φ et ψ sont continues sur $[a,b]$.
3. Si $y = f'(a)$ ou $y = f'(b)$, on peut prendre $c = a$ ou $c = b$ selon le cas et le théorème est démontré.
4. On a $t = \varphi(b) = \psi(a)$. On suppose que $t < f'(a)$. Dans ce cas, $y \in [t, f'(b)] = [\psi(a), \psi(b)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a,b]$ tel $y = \psi(x)$. Comme $y \neq f'(b)$, $x \neq b$ donc

$$y = \psi(x) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

   et en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x,b]$ à la fonction f,

$$\exists c \in]x,b[, \quad y = \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(c).$$

5. On suppose que $f'(b) < t$. Dans ce cas, $y \in [f'(a),t] = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a,b]$ tel $y = \varphi(x)$. Comme $y \neq f'(a)$, $x \neq a$ donc

$$y = \varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

   et en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[a,x]$ à la fonction f,

$$\exists c \in]a,x[, \quad y = \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(c).$$

   On suppose que $f'(a) \leq t \leq f'(b)$. Deux cas sont possibles : $y \in [f'(a),t]$ et on se ramène au second cas ou $y \in [t, f'(b)]$ et on se ramène au premier cas.
6. En conclusion, dans tous les cas, il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f'(c)$.