Ce devoir est à rédiger individuellement pour la date précisée. On prendra garde à la rédaction et au soin apporté à la copie.

Exercice 1 *Factorisation*

Pour cet exercice, on pourra revoir l'exemple de factorisation de $X^{2n}-1$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes X^4-1 et X^3+1 (on pourra écrire $-1=e^{-i\pi}$).
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que les racines complexes de $X^{2n+1}+1$ sont les z_k, pour $k\in[\![0,2n]\!]$:
$$z_k = e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}.$$
3. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$X^{2n+1}+1=\prod_{k=0}^{2n}\left(X-e^{i\frac{2k+1}{2n+1}\pi}\right).$$
Quel résultat a été obtenu ?
4. En déduire la factorisation, pour $n\in\mathbb{N}$, de $X^{2n+1}+1$ dans $\mathbb{R}[X]$ (on s'inspirera de l'exemple fait en cours pour regrouper les racines et leur conjuguées).
5. Montrer de façon analogue que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$X^{2n}+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)X+1\right).$$
Justifier qu'il s'agit bien d'une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 *Fonction définie par une intégrale*

Pour $x\in]0,1[$, on pose
$$\varphi(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

1. Montrer que φ est bien définie.
2. Montrer que pour tout $x\in]0,1[$, pour tout $t\in[x^2,x]$,
$$\frac{x^2}{t\,\ln t}\geq\frac{1}{\ln t}\geq\frac{x}{t\,\ln t}$$
puis que
$$\int_x^{x^2}\frac{x^2}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t\leq\varphi(x)\leq\int_x^{x^2}\frac{x}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que pour tout $x\in]0,1[$, $x\ln(2)\geq\varphi(x)\geq x^2\ln 2$ puis déterminer les limites de φ en 0^+ et 1^-.
4. Montrer que φ est dérivable sur $]0,1[$ puis que pour tout $x\in]0,1[$, $\varphi'(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$.
5. *(question facultative)* Montrer l'existence et déterminer la valeur de
$$\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 *Racines de polynômes*

Soit P un polynôme non constant à coefficients réels, scindé et à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. On note ainsi ses racines distinctes : $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

1. En appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ pour $i = 1, \dots, n-1$, montrer que le polynôme P' est scindé et à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ (on pourra revoir l'application du cours après le théorème de Rolle dans le chapitre 13).
2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine double de P^2+1, alors $P^2(\alpha)+1 = 0$ et $P(\alpha)P'(\alpha) = 0$.
3. Les racines de P^2+1 peuvent-elles être réelles ?
4. Conclure que P^2+1 est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4 *Théorème de Darboux (facultatif ou obligatoire pour les élèves prévenus)*

Soit a, b deux réels avec $a < b$ et f une fonction dérivable sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sans que f' soit supposée continue c'est-à-dire que pour tout réel $y \in [f'(a), f'(b)]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = y$. On pose

$$t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On suppose sans perte de généralité que $f'(a) < f'(b)$ et on considère $y \in [f'(a), f'(b)]$.

1. Expliquer pourquoi le fait de supposer $f'(a) < f'(b)$ ne provoque pas de perte de généralité : comment traiterait-on les cas $f'(a) = f'(b)$ et $f'(a) > f'(b)$?
2. On considère les fonctions φ et ψ définies sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \in]a,b] \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \in [a,b[\\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}.$$

   Montrer que φ et ψ sont continues sur $[a,b]$.
3. Justifier que si $y = f'(a)$ ou $y = f'(b)$ alors le théorème est démontré. On supposera dans la suite que $y \in]f'(a), f'(b)[$.
4. On suppose dans cette question que $t < f'(a)$. Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel $y = \psi(x)$ puis qu'il existe $c \in]x,b[$ tel que $y = f'(c)$.
5. Traiter les cas $t > f'(b)$ et $f'(a) \leqslant t \leqslant f'(b)$.
6. Conclure l'exercice.
