DM7

Ce devoir est à rendre pour le mardi 20 novembre à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM7.1

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation d'inconnue $z \in C$:

$$z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0. \qquad (E)$$

On pose $\mathrm{j} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Solutions sous forme trigonométrique

1. Réécrire l'équation précédente en utilisant j et sans utiliser i.
2. Développer $(i \times 4\sqrt{3}j)^2$ puis résoudre l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:
$$Z^2 - 4jZ + 16j^2 = 0.$$
3. Montrer finalement que l'équation (E) possède huit solutions données par les expressions
$$z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)}$$
pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Solutions sous forme algébrique

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points P et Q du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs $p = \sqrt{3} - i$ et $q = e^{i\frac{\pi}{4}}p$.

4. Exprimer p et q sous forme trigonométrique.
5. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}\right)$ et de l'angle $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)$. Quelle est la nature du triangle POQ ?
6. Déterminer la valeur de q sous forme algébrique puis en déduire que
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}.$$
7. Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique.

Exercice DM7.2

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$ est $\frac{1}{n}$-périodique (on pourra faire des décalages d'indices).
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1/n[$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor = 0$.
4. Conclure l'exercice.