Exercice 1 *Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$*

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et exp est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ donc, par composition, f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{u\to+\infty} e^{-u} = 0 = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0)$$

   Ainsi, f est également continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

   Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$,

$$f^{(0)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{P_0(x)}{x^0}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

   où on a posé $P_0 = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un polynôme P_n tel que que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

   On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= f^{(n)'}(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P_n(x)}{x^{2n}}\, e^{-\frac{1}{x}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P_n(x)}{x^{2n}}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) \\
&= \frac{P_n'(x)x^{2n} - P_n(x)2nx^{2n-1}}{x^{4n}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\,\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{x^{2n-2}\left(P_n'(x)x^2 - P_n(x)2nx\right)}{x^{4n}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{x^2 P_n'(x) + (1-2nx)P_n(x)}{x^{2(n+1)}}\, e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}}\, e^{-\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

   où on a posé $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1-2nx)P_n(x)$ qui est bien un polynôme en tant que somme et produit de dérivées de polynômes. Ceci achève la récurrence. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

3. En évaluant la relation précédente en 0, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(0) = 0^2 P_n'(0) + (1 - 2n \times 0)P_n(0) = P_n(0).$$

   Or, $P_0 = 1$ et la suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 1$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $P_n(0) = 1 \neq 0$ et que $t \mapsto P_n(t)$ est continue en tant que fonction polynomiale, on a

$$P_n(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} 1$$

donc, par quotient d'équivalent, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{u\to +\infty} u^{2n} e^{-u} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

donc par théorème de limite de la dérivée, la fonction $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n)'}(0) = f^{(n+1)}(0) = 0$. En conclusion, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 *Fonction contractante*

1. Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. Par somme, g est dériavable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} - 1 < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction g est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R})$. De plus,

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$$

par croissante comparée. Ainsi, $0 \in g(\mathbb{R})$ donc il existe un unique réel ℓ tel que $g(\ell) = 0$ ce qui s'écrit $f(\ell) = \ell$.
3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f'(x)| = \left| -\frac{1}{2}e^{-x} \right| \leq \frac{1}{2}$$

donc f est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$: pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

4. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$.
Pour $n = 0$, $|u_0 - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \ell|$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$. On a

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|$$

ce qui achève la récurrence. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$.
5. On a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc par théorème d'encadrement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 3 *Famille de polynômes*

1. On obtient, en appliquant la formule, $P_2 = X^2 - 2$ et $P_3 = X^3 - 3X$.
2. Le polynôme P_0 est de degré 0 et a pour coefficient dominant 2. Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n et a pour coefficient dominant 1.
Les polynômes P_1 et P_2 sont de degrés respectifs 1 et 2 et de coefficients dominants 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, P_k est de degré k et de coefficient dominant 1.
En notant $\widetilde{P_n} = P_n - a_n X^n$ et $\widetilde{P_{n-1}} = P_{n-1} - a_{n-1}X^{n-1}$, on a :

$$P_{n+1} = XP_n - P_{n-1} = X(a_n X^n + \widetilde{P_n}) - a_{n-1}X^{n-1} + \widetilde{P_{n-1}} = a_n X^{n+1} + \underbrace{X\widetilde{P_n} - a_{n-1}X^{n-1} + \widetilde{P_{n-1}}}_{\text{de degré au plus } n}$$

donc $\deg(P_{n+1}) = n + 1$ et $a_{n+1} = a_n = 1$ ce qui achève la récurrence. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est de degré n et a pour coefficient dominant 1.

3. Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a
$$P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n.$$
On a, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $P_0(z+1/z) = 2 = z^0 + 1/z^0$ et $P_1(z) = z + 1/z = z^1 + 1/z^1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $P_k(z+1/z) = z^k + 1/z^k$.
On a :
$$P_{n+1}(z+1/z) = (z+1/z)P_n(z+1/z) - P_{n-1}(z+1/z) = (z+1/z)(z^n + 1/z^n) - (z^{n-1} + 1/z^{n-1})$$
puis
$$P_{n+1}(z+1/z) = z^{n+1} + z^{n-1} + 1/z^{n-1} + 1/z^{n+1} - (z^{n-1} + 1/z^{n-1}) = z^{n+1} + 1/z^{n+1}$$
ce qui achève la récurrence. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a
$$P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a
$$P_n(2\cos\theta) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = P_n(e^{i\theta} + 1/e^{i\theta}) = e^{in\theta} + 1/e^{in\theta} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme P_n est de degré n, il possède au plus n racines distinctes. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :
$$\begin{aligned} P_n(2\cos\theta) = 0 &\iff 2\cos(n\theta) = 0 \\ &\iff cos(n\theta) = 0 \\ &\iff n\theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$
Par suite, les réels x_k de la forme
$$x_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$
pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont donc des racines de P_n. Comme ces réels sont tous distincts et au nombre de n, les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont les racines de P_n.

Exercice 4 *Développement limité d'une fonction réciproque (facultatif)*

1. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = x\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x > 0$$
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (les limites de f en $\pm\infty$ sont claires). De plus, par parité de ch, f est impaire.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = g(x)$. On a $-x \in \mathbb{R}$ et
$$g(-x) = g(-f(y)) = g(f(-y)) = -y = -g(x)$$
donc g est impaire.

2. On a
$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^2) \quad \text{et} \quad e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
donc, par somme,
$$\mathrm{ch}\,x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
puis
$$f(x) = x\,\mathrm{ch}\,x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5)$$

3. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème de dérivation de la fonction réciproque, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. Comme g est de classe au moins $\mathscr{C}^5$ sur $\mathbb{R}$ donc au voisinage de 0, par la formule de Taylor-Young, g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.
5. Comme g est impaire, le développement limité de g au voisinage de 0 ne comporte que des puissances impaires : a_0, a_2, a_4 sont nuls.
6. On a
$$g(y) \underset{y\to 0}{=} a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + o(y^5)$$
ce qui donne, comme $f(0) = 0$,
$$g(f(x)) \underset{x\to 0}{=} \text{Tronc}_5\left(a_1\left(x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5\right)+a_3\left(x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5\right)^3+a_5\left(x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5\right)^5\right)+o(x^5)$$
donc
$$g(f(x)) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + a_3\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{24}+\frac{3}{2}a_3+a_5\right)x^3 + o(x^5).$$
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = x$.
7. Par unicité de la partie régulière d'un développement limité, on a
$$a_1 = 1, \quad \frac{1}{2}a_1 + a_3 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a_1}{24}+\frac{3}{2}a_3+a_5 = 0$$
donc
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + \frac{17}{24}x^5 + o(x^5).$$