DM6

Ce devoir est à rendre pour le mardi 13 novembre à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM6.1

Pour tout entier naturel n, on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Donner une primitive simple de $x \longmapsto x(1-x^2)^n$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, en déduire que : $S_n - S_{n+1} = \dfrac{S_{n+1}}{2n+2}$.
3. Donner une conjecture sur la valeur de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On commencera par écrire S_n, à l'aide la question précédente, comme un produit de fractions « avec des points de suspension », puis on « bouchera les trous » du numérateur et du dénominateur pour faire apparaître des factorielles.
4. Démontrer le résultat précédent par récurrence.

Exercice DM6.2

Soit E un ensemble. Pour tout ensemble $A \subset E$, on définit la fonction indicatrice de A notée $\mathbb{1}_A$, l'application vérifiant pour tout $x \in E$
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Dans la suite, on considère A, B des sous-ensembles de E fixés.

1. Montrer que $A = B \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
2. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
3. De quels ensembles les fonctions $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ et $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ sont-elles les indicatrices ?
4. Montrer que $\mathbb{1}_{\overline{A}\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap\overline{B}} + \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Exercice DM6.3

On souhaite calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, le produit $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1}$.

1. Donner sous forme trigonométrique les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$. En déduire, toujours sous forme trigonométrique, les nombres complexes z tels que $z^3 = -1$.
2. Déterminer, pour tout $z \in \mathbb{C}$, des expressions de z^3+1 et z^3-1 comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients complexes.
3. On note $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Donner la forme trigonométrique de $\mathrm{j}+1$.
4. Calculer alors P_n en faisant apparaître des produits télescopiques. On simplifiera le résultat au maximum afin que tous les termes qui apparaissent soient des nombres réels.