Ce devoir est à rédiger individuellement pour la date précisée. On prendra garde à la rédaction et au soin apporté à la copie.

Exercice 1 *Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$*

On pourra commencer par revoir l'exemple fait en cours après le proposition 69 du chapitre 11. On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x \leq 0 \end{cases} .$$

1. Justifier que f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}.$$
On montrera notamment que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^{+,*}$: $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1-2nx)P_n(x)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_{n+1}(0) = P_n(0)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 1$.
4. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f^{(n)}(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$
et que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 *Fonction contractante*

On définit la fonction f pour $x \in \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} e^{-x}.$$

1. Déterminer les variations de $x \mapsto f(x) - x$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$. On ne cherchera pas à calculer ℓ.
3. Montrer que f est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$: pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$,
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

On définit désormais par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_0 \in \mathbb{R}^+$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. En utilisant les questions 1, 2 et 3, montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|.$$
On utilisera notamment la question 3 en remplaçant x par u_n et y par ℓ.
5. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 *Famille de polynômes*

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a

$$P_n(z+1/z) = z^n + 1/z^n.$$

4. Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta).$$

5. Déterminer les racines de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 *Développement limité d'une fonction réciproque (facultatif)*

On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x\operatorname{ch} x.$$

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g sa bijection réciproque.
2. En remarquant que f est impaire, montrer que g est impaire.
3. Justifier que

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

4. Montrer, en justifiant bien les hypothèses du théorème utilisé, que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0. On le note :

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

6. Montrer, à l'aide de la question 2 que a_0, a_2, a_4 sont nuls.
7. En composant, écrire le développement limité de $g\circ f$ (qui dépend donc de a_1, a_3 et a_5). Que vaut $g\circ f$?
8. Conclure, à l'aide de l'unicité d'un développement limité, sur l'expression du développement limité de g en 0 à l'ordre 5.