Exercice 1 *: Système à paramètres*

1. On peut réécrire le système (S_m) sous forme matricielle $A_mX = B$ où
$$A_m = \begin{pmatrix} (1-m) & 2 & -1 \\ -2 & -(3+m) & 3 \\ 1 & 1 & -(2+m) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. On effectue successivement les opérations élémentaires $L_1 \longleftrightarrow L_3$ puis $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$ et enfin $L_3 \longleftarrow L_3 - (1-m)L_1$ ce qui donne
$$A_m \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(2+m) \\ -2 & -(3+m) & -(1+2m) \\ (1-m) & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(2+m) \\ 0 & -(1+m) & -(1+2m) \\ 0 & 1+m & -1+(2+m)(1-m) \end{pmatrix}$$
puis en effectuant $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$, on obtient
$$A_m \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(2+m) \\ 0 & -(1+m) & -(1+2m) \\ 0 & 0 & 1-m-m^2-1-2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-m \\ 0 & -1-m & -1-2m \\ 0 & 0 & -3m-m^2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice A_m est équivalente à une matrice échelonnée triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont 1, $-(1+m)$ et $-3m-m^2 = -m(3+m)$. Ainsi, la matrice A_m est inversible si et seulement si ces trois coefficients sont non nuls c'est-à-dire : $m \neq -1$, $m \neq 0$ et $m \neq -3$.
4. Lorsque $m \notin \{-3,-1,0\}$, la matrice A_m est inversible et dans ce cas, le système homogène (S_m) admet une unique solution : $(0,0,0)$.
5. Voir à la fin du corrigé
6. Lorsque $m = 0$, avec la question 2, on a
$$(S_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ -y-z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= 3z \\ y &= -z \end{cases}$$
dont les inconnues principales sont x et y et l'inconnue secondaire z. L'ensemble des solutions du système (S_0) s'écrit $\mathscr{S}_0 = \{(3z,-z,z) | z \in \mathbb{R}\}$. De façon analogue, l'ensemble des solutions du système (S_{-3}) s'écrit $\mathscr{S}_{-3} = \left\{\left(-\frac{5}{2}z, \frac{3}{2}z, z\right) \middle| z \in \mathbb{R}\right\}$.
7. Lorsque $m = -1$, avec la question 2, on a
$$(S_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ z &= 0 \\ 2z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left\{ x = -y \right.$$
L'ensemble des solutions du système (S_{-1}) s'écrit$\mathscr{S}_{-1} = \{(-y,y,0) | y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 : *Une fonction (adapté exercice d'oral CCP PC)*

1. Comme exp et la fonction inverse sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, par composition, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$
2. On a
$$\frac{-1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad \frac{-1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
donc, par composition,
$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0^+ \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

3. Avec la question 1, g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, de plus,

$$g(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = g(0)$$

donc g est également continue en 0 (à droite). En conclusion, g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. Compte-tenu du signe de g' sur $\mathbb{R}_+^*$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, g est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) = [0,1[$ avec les limites de 2. On a le tableau

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow 1$

5. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

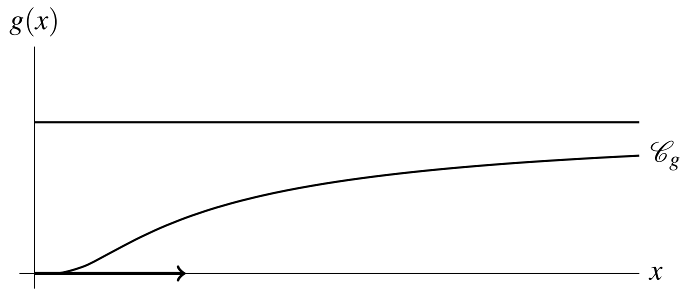
$$\frac{g(x)-g(x)}{x-0} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

Or $Xe^{-X} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par composition,

$$\frac{g(x)-g(x)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, g est dérivable en 0 à droite et $g'(0) = 0$.

6. On a la courbe



Exercice 3 Calculs de développements limités.

---

1. On a les développements limités :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

donc, par différence,

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

2. On a les développements limités :

$$e^y \underset{y\to 0}{=} 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) \quad \text{et} \quad \arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

donc, comme $\arctan(0) = 0$, par composition,

$$e^{\arctan(x)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Tronc}_3\left(1 + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3\right) + o(x^3)$$

puis

$$e^{\arctan(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

3. On a
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$
qui donne
$$\frac{x}{\sin x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$
donc, comme
$$\frac{1}{1-y} \underset{y\to 0}{=} 1+y+y^2+o(y^2),$$
on obtient
$$\frac{x}{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{6}+o(x^2).$$
4. On a le développement limité :
$$e^h \underset{h\to 0}{=} 1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}+o(h^4)$$
donc
$$e^{1+h} \underset{h\to 0}{=} e+eh+\frac{eh^2}{2}+\frac{eh^3}{6}+\frac{eh^4}{24}+o(h^4)$$
qui s'écrit
$$e^x \underset{x\to 1}{=} e+e(x-1)+\frac{e(x-1)^2}{2}+\frac{e(x-1)^3}{6}+\frac{e(x-1)^4}{24}+o((x-1)^4).$$
5. On a le développement limité
$$\frac{1}{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1-h+h^2-h^3+h^4+o(h^4)$$
qui donne
$$\frac{1}{x} \underset{x\to 1}{=} 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4+o((x-1)^4).$$

Exercice 4 Moyenne géométrique *(facultatif : adapté exercice d'oral CCP PSI)*

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $a_0=a>0$, $b_0=b>0$ avec $b<a$ puis, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}.$$

1. Par récurrence immédiate, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n, b_n>0$ donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=\frac{(a_n+b_n)^2-4a_nb_n}{2(a_n+b_n)}=\frac{a_n^2+b_n^2-2a_nb_n}{2(a_n+b_n)}=\frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}$$
3. On obtient donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$a_n-b_n=\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})}\geqslant 0$$
et $a_0\geqslant b_0$ donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\geq b_n$.
4. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme $a_n\geqslant b_n$,
$$a_{n+1}-a_n=\frac{b_n-a_n}{2}\leqslant 0$$
et
$$b_{n+1}-b_n=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}-b_n=\frac{2a_nb_n-b_n(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n}\geqslant 0$$
donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.

5. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc, par le théorème de la limite monotone, elle est convergente. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par décroissance $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_0 \geqslant a_n \geqslant b_n$ donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par a_0 : la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente par le théorème de la limite monotone.
6. On a, comme $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

puis, en passant à la limite dans l'égalité, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},$$

on obtient

$$\ell = \frac{\ell+\ell'}{2},$$

puis $\ell=\ell'$. De plus, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = a_nb_n$$

donc la suite $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_nb_n = a_0b_0 = ab$$

ce qui donne, en passant à la limite $\ell^2 = ab$ puis, par positivité de ℓ, $\ell=\sqrt{ab}$.
7. Avec la question précédente, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n = \frac{\ell^2}{a_n}$ donc

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{a_n+\frac{\ell^2}{a_n}}{2} = \frac{a_n^2+\ell^2}{2a_n}$$

ce qui donne, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+1}-\ell = \frac{a_n^2+\ell}{2a_n}-\ell = \frac{a_n^2-2\ell a_n+\ell^2}{2a_n} = \frac{(a_n-\ell)^2}{2a_n}.$$

De la même manière, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+1}+\ell = \frac{a_n^2+\ell}{2a_n}+\ell = \frac{a_n^2+2\ell a_n+\ell^2}{2a_n} = \frac{(a_n+\ell)^2}{2a_n}.$$

8. On obtient, par récurrence immédiate, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{a_n-\ell}{a_n+\ell} = \left(\frac{a_{n-1}-\ell}{a_{n-1}+\ell}\right)^2 = \cdots = \left(\frac{a_0-\ell}{a_0+\ell}\right)^{2^n}$$

ce qui donne, comme $\ell\neq 0$,

$$\frac{a_n-\ell}{a_n+\ell} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n-\ell}{2\ell}$$

et enfin

$$a_n-\ell \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ell\left(\frac{a_0-\ell}{a_0+\ell}\right)^{2^n}.$$