DM5

Ce devoir est à rendre pour le mardi 6 novembre à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM5.1

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante, de fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(E)\ :\ (1+x^2)y''+xy'-y=x\sqrt{1+x^2}.$$

On considère également l'équation différentielle suivante, de fonction inconnue z de la variable réelle t :

$$(F)\ :\ z''-z=\frac{1}{4}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right).$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (F).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (F).
3. Justifier que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note sh^{-1} sa bijection réciproque.
4. Montrer que pour tout réel x : $\text{ch}\left(\text{sh}^{-1}(x)\right)=\sqrt{1+x^2}$. Simplifier également, pour tout réel x : $\text{sh}\left(\text{sh}^{-1}(x)\right)$, $e^{\text{sh}^{-1}(x)}$ et $e^{-\text{sh}^{-1}(x)}$.
5. Justifier que la dérivée de sh^{-1} est $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (on précisera sur quel ensemble).

Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $z:t\mapsto y(\text{sh}(t))$.

6. Exprimer, en justifiant, $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et t. En déduire que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (F).
7. Déterminer finalement l'ensemble des solutions de (E).

Exercice DM5.2

Convexité

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. On veut montrer que pour tout $t\in[0,1]$:

$$\mathrm{e}^{ta+(1-t)b}\leqslant t\mathrm{e}^a+(1-t)\mathrm{e}^b. \tag{1}$$

On pose pour tout $t\in[0,1]$, $g(t)=t\mathrm{e}^a+(1-t)\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^{ta+(1-t)b}$.

1. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$.
2. Justifier g est dérivable deux fois sur $[0,1]$ et que pour tout $t\in[0,1]$, $g'(t)=e^a-e^b-(a-b)e^{ta+(1-t)b}$. Calculer également g'' (on rappelle que a et b sont **fixés**).
3. Déterminer la monotonie de g' sur $[0,1]$ et les signes de $g'(0)$ et $g'(1)$.
4. Justifier, en citant le théorème utilisé, qu'il existe un unique réel $\alpha\in[0,1]$ tel que $g'(\alpha)=0$.
5. Conclure.

Inégalité arithmético-géométrique

On souhaite montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, et tous $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{x_1}+\cdots+\mathrm{e}^{x_n}\right). \tag{2}$$

6. Montrer le résultat (2) demandé pour $n=2$.
7. Montrer le résultat (2) par récurrence.
8. *Application :* Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ et $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^{+,*}$,

$$(a_1\times\cdots\times a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$