DM 5 — À rendre pour le 18/01/2017

Ce devoir est à rédiger individuellement pour la date précisée. On prendra garde à la rédaction et au soin apporté à la copie.

Exercice 1 *: Système à paramètres*

Soit $m \in \mathbb{R}$. On souhaite résoudre le système, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S_m)\left\{\begin{array}{rcl} (1-m)x+2y-z & = & 0 \\ -2x-(3+m)y+3z & = & 0 \\ x+y-(2+m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Écrire le système (S_m) sous forme matricielle $A_mX = B$ où $A_m \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et B un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. En indiquant quelles opérations élémentaires sont effectuées, montrer que la matrice A_m est équivalente en lignes à :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-m \\ 0 & -1-m & -1-2m \\ 0 & 0 & -3m-m^2 \end{pmatrix}.$$
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur m pour que A_m soit inversible.
4. Résoudre le système (S_m) lorsque $m \notin \{-3, -1, 0\}$.
5. Déterminer l'expression de l'inverse de la matrice A_m lorsque $m \notin \{-3, -1, 0\}$.
6. Résoudre le système (S_m) lorsque $m \in \{-3, 0\}$. On précisera les inconnues principales et secondaires et on écrira précisément l'ensemble des solutions du système.
7. Résoudre le système (S_m) lorsque $m = -1$.

Exercice 2 : *Une fonction (adapté exercice d'oral CCP PC)*

Soit f la fonctions définie pour $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et déterminer la valeur de sa dérivée.
2. Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. On pose désormais $g(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(x)$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Dresser le tableau de variations de g et montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle que l'on précisera.
5. En calculant la limite du taux d'accroissement de g en 0^+, montrer que g est dérivable en 0 (à droite). Quelle est la valeur de cette dérivée ?
6. Tracer l'allure de la courbe de g en représentant sa tangente en 0 et son asymptote en $+\infty$.

Exercice 3 Calculs de développements limités.

Calculer les développements limités de la fonction f suivante, au point et à l'ordre considéré :

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en 0 à l'ordre 3 ;
2. $f(x) = e^{\arctan x}$ en 0 à l'ordre 3 ;
3. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ en 0 à l'ordre 2 ;
4. $f(x) = e^x$ en 1 à l'ordre 4 (on peut poser $x = 1+h$ par exemple) ;
5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $a \in \mathbb{R}^{+,*}$ à l'ordre 4 (on pourra utiliser la formule de Taylor-Young).

Exercice 4 Moyenne géométrique *(facultatif : adapté exercice d'oral CCP PSI)*

On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $a_0 = a > 0$, $b_0 = b > 0$ avec $b < a$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{2\,a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

1. Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que
$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}.$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq b_n$ (on n'oubliera pas de traiter le cas $n = 0$).
4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
5. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. **On note ℓ la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ' celle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
6. Justifier que $\ell = \ell' = \sqrt{ab}$.
7. Montrer, avec la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} - \ell = \frac{(a_n - \ell)^2}{2\,a_n} \quad \text{et} \quad a_{n+1} + \ell = \frac{(a_n + \ell)^2}{2\,a_n}.$$
8. En déduire un équivalent de $(a_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$.