Exercice 1 Une équation différentielle avec changement de fonction

On considère les équations différentielles d'inconnues respectives z et y des fonctions classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$:

$$z'' + z = xe^x \quad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{E}$$

et

$$(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = xe^x \quad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{F}$$

1. Posons $f\colon x \mapsto \frac{x-1}{2}e^x$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{x}{2}\mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^x$$
donc
$$f''(x) + f(x) = \frac{x-1+x+1}{2}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$$
donc f est une solution particulière de (E).

2. L'équation homogène associée à (E) s'écrit $z'' + z = 0$ et ses solutions sont de la forme
$$z\colon x \mapsto C_1 \cos x + C_2 \sin(x)$$
où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ donc, avec la solution particulière de la question 1, l'ensemble des solutions de l'équation (E) s'écrit
$$\mathscr{S}_E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x-1}{2}e^x \,\middle|\, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. On considère y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on pose
$$z : x \mapsto (1+e^x)y(x).$$
Par produit, z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$z'(x) = \mathrm{e}^x y(x) + (1+\mathrm{e}^x)y'(x) \quad \text{et} \quad z''(x) = \mathrm{e}^x y(x) + \mathrm{e}^x y'(x) + \mathrm{e}^x y'(x) + (1+\mathrm{e}^x)y''(x).$$
On obtient l'égalité, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$z''(x)+z(x) = \mathrm{e}^x y(x) + \mathrm{e}^x y'(x) + (1+\mathrm{e}^x)y'(x) + \mathrm{e}^x y''(x) + (1+\mathrm{e}^x)y(x) = (1+e^x)y''(x) + 2e^x y'(x) + (2e^x+1)y(x)$$
qui donne l'équivalence,
$$z'' + z = x\mathrm{e}^x \iff (1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = xe^x.$$
En conclusion, y est solution de (F) si et seulement si z est solution de (E).

4. D'après la question 3, y est solution de (F) si seulement si $z : x \mapsto (1+\mathrm{e}^x)y(x)$ est solution de (E) donc D'après les questions 1 et 2, y est solution de (F) si et seulement si il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(1+\mathrm{e}^x)y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x-1}{2}e^x$$
c'est-à-dire
$$y(x) = C_1 \frac{\cos x}{1+\mathrm{e}^x} + C_2 \frac{\sin x}{1+\mathrm{e}^x} + \frac{x-1}{2+2\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x.$$
En conclusion, l'ensemble des solutions de (F) s'écrit
$$\mathscr{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto C_1 \frac{\cos x}{1+e^x} + C_2 \frac{\sin x}{1+e^x} + \frac{x-1}{2+2e^x}e^x \,\middle|\, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2 Une suite d'intégrales

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application φ_n définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$ et l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t$$

1. On a
$$I_0 = \int_0^1 e^{-2t}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par linéarité de l'intégrale,
$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 [(1-t)^n - (1-t)^{n+1}]e^{-2t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t(1-t)^n e^{-2t}\ \mathrm{d}t.$$
Or, pour tout $t \in [0,1]$, $t(1-t)^n e^{-2t} \geqslant 0$ donc $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. De la même manière, comme pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi_n(t) \geqslant 0$, $I_n \geqslant 0$. En conclusion, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

3. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive donc minorée par 0 et décroissante : par le théorème de la limite monotone, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in [0,1]$,
$$g(t) = e^{-2t} \leq e^0 = 1.$$
La fonction g est majorée par 1 sur $[0,1]$. Par croissance de l'intégrale, on obtient l'inégalité, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 (1-t)^n\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

5. On sait que $1/(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par théorème d'encadrement
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration parties dans I_{n+1} où on va dériver la fonction $u : t \mapsto (1-t)^{n+1}$ qui donne $u' : t \mapsto -(n+1)(1-t)^n$ et utiliser une primitive de $v' : t \mapsto e^{-2t}$, $v : t \mapsto -e^{-2t}/2$.
Les fonctions $t \mapsto -e^{-2t}/2$ et $t \mapsto (1-t)^{n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et on a, par la formule d'intégration par parties,
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n+1}{2}(1-t)^n e^{-2t}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}[1-(n+1)I_n]. \end{aligned}$$
Finalement, on a la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$.

7. Réécrivons la relation précédente : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}.$$
Or, $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, en tant que suite extraite, $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par opérations sur les limites
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

8. On peut à nouveau réécrire la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} = -nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + I_{n+1}.$$

Or, à nouveau en tant que suite extraite, $(n+1)I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ qui donne, par opérations sur les limites,

$$n(nI_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1 + -2 + 0 = -3.$$

Exercice 3 Une suite implicite *(facultatif)*

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\psi_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

La fonction ψ_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi_n'(x) = nx^{n-1} + \cdots + 1 > 0.$$

On a $\psi_n(0) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \psi_n = +\infty$. Par suite, ψ_n est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1, \infty[$.
Finalement, il existe un unique $x_n \geq 0$ tel que $\psi_n(x_n) = 0$ c'est-à-dire

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1.$$

De plus, avec la formule de la somme géométrique

$$\psi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - 2 = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0$$

et $\psi_n(1) = n - 1 \geq 0$ donc $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. Montrons que la suite (x_n) est strictement décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\psi_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + \psi_n(x_n) = x_n^{n+1} > 0 = \psi_{n+1}(x_{n+1})$$

donc par stricte croissance de ψ_{n+1}, $x_n > x_{n+1}$. Ainsi, (x_n) est strictement décroissante. De plus, cette suite est minorée par $\frac{1}{2}$ donc, par le théorème de la limite monotone, (x_n) est convergente.

3. Notons ℓ la limite de (x_n). Par strictement décroissance de (x_n) et l'encadrement de la question 1, on a $1 > x_2 \geqslant \ell \geqslant \frac{1}{2}$. Ainsi, on a, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant x_n^{n+1} \leqslant x_2^{n+1}$$

puis, par encadrement, $x_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 = \psi_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1} - 1}{x_n - 1} - 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{\ell - 1} - 2$$

qui donne $\frac{-1}{\ell-1} - 2 = 0$ puis $\ell = \frac{1}{2}$. En conclusion, (x_n) converge vers $\frac{1}{2}$.
