DM4

Ce devoir est à rendre pour le mardi 9 octobre à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM4.1

Partie I : propriétés des fonctions hyperboliques et de leurs réciproques

1. Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice, on note Argsh la bijection réciproque de sh ; la fonction Argsh est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une expression simple des expressions suivantes :
   (a) $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}$;
   (b) $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)$.
3. *Question indépendante des précédentes.* Pour tout réel x, exprimer $\operatorname{ch}^2 x$ en fonction de $\operatorname{ch}(2x)$ et montrer également que
$$\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Partie II : application au calcul de primitives

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide du changement de variable $t = \operatorname{sh} y$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (le résultat fera apparaître $\operatorname{Argsh} x$).
5. On souhaite déterminer une primitive de $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.
   (a) Mettre le polynôme X^2+X+1 sous forme canonique. En déduire sur quel ensemble g admet une primitive.
   (b) Déterminer des constantes réelles a, b, c telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+x+1 = a \cdot \Big((bx+c)^2+1\Big).$$
   (c) Conclure à l'aide des questions 4 et 5.2.
6. Déterminer par la même méthode une primitive de $h : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+5}$.

Exercice DM4.2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\tan t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$. On justifiera soigneusement sa réponse.

Dans la suite de l'exercice, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$.

2. Étudier le signe et la parité de f.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée. En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$ (on ne demande pas, pour l'instant, de calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$).
4. (a) Montrer que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, $t \leqslant \tan t \leqslant t + \frac{t^2}{4}$ (pour l'inégalité de droite, on étudiera la différence des deux membres en dérivant deux fois).
   (b) En déduire un encadrement de $f(x)$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{8}\right[$, et étudier l'existence d'une limite pour f en 0.
5. *Question facultative.* À l'aide du changement de variable $t = \operatorname{Arctan} y$, montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$,
$$f(x) \geqslant \frac{4}{\pi^2}\int_{\tan x}^{\tan(2x)} \frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$
et en déduire que $f(x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{4}]{} +\infty$.