Exercice 1 Intégrales de Wallis

1. On a :
$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 t \, \mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1.$$
2. Pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $0 \le \cos t \le 1$,
$$0 \le \cos^{n+1} t \le \cos^n t$$
donc, par positivité de l'intégrale,
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t \ge 0.$$
3. Par croissance de l'intégrale, avec l'inégalité, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^{n+1} t \le \cos^n t$, on a :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \, \mathrm{d}t \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$$
ce qui s'écrit $W_{n+1} \le W_n$. En conclusion, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_{n+2} \le W_{n+1} \le W_n$$
ce qui donne, en divisant par $W_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \le \frac{W_{n+1}}{W_n} \le 1.$$
4. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$\begin{cases} f'(t) = \cos t \\ g(t) = \cos^{n+1} t \end{cases} \quad \text{qui donne} \quad \begin{cases} f(t) = \sin t \\ g'(t) = -(n+1)\sin t \cos^n t \end{cases}.$$
Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc, par la formule d'intégration par parties
$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n+1} t \, \mathrm{d}t = \underbrace{\left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)\sin t \cos^n t \sin t \, \mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, \mathrm{d}t$$
ce qui donne, compte tenu du fait que $\sin^2 = 1 - \cos^2$ sur $\mathbb{R}$,
$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \, \mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, \mathrm{d}t.$$
En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = (n+1)\big(W_n - W_{n+2}\big)$.
6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en réécrivant la relation de la question précédente, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ donc
$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = u_n$$
donc la suite $\big((n+1)\,W_{n+1}\,W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+1)W_{n+1}W_n = 1 \times W_1W_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

7. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{2p}{2p} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2} W_0.$$

Pour $p = 0$, $W_{2\times 0} = W_0$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$W_{2p} = \frac{2p}{2p} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2} W_0.$$

On a la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ qui donne, en prenant $n = 2p$,

$$\begin{aligned} W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} &= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{2p}{2p} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2} W_0 \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)(2p+2)} \times \frac{2p}{2p} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2} W_0 \end{aligned}$$

donc

$$W_{2(p+1)} = \frac{2(p+1)}{2(p+1)} \times \frac{2p+1}{2(p+1)} \times \frac{2p}{2p} \times \frac{2p-1}{2p} \times \cdots \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2} W_0$$

ce qui achève la récurrence. En conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{2p}{2p} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2} W_0.$$

8. Soit $p \in \mathbb{N}$. Compte-tenu de la question précédente et avec la valeur de W_0 de la question 1 on a

$$W_{2p} = \frac{\prod_{k=1}^{2p} k}{\prod_{k=1}^{p} 2k \times \prod_{k=1}^{p} 2k} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{\left(\prod_{k=1}^{p} 2\right)^2 \left(\prod_{k=1}^{p} k\right)^2} \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2 Des primitives et des intégrales

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ comme inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^{+,*}$ donc cette fonction admet une primitive sur $\mathbb{R}^{+,*}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ est de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ où $u = \ln$. En conclusion, $x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}^{+,*}$ donnée par

$$x \mapsto \arctan(\ln x).$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{A}{x-1}$$

avec $A = 1$. La fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pas linéarité, une primitive de $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ sur $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$ est donnée par

$$x \mapsto x + \ln|x-1|.$$

3. On pose, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(t) = \cos t \\ g(t) = t^2 + 1 \end{array} \right. \quad \text{qui donne} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(t) = \sin t \\ g'(t) = 2t \end{array} \right. .$$

Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc, par la formule d'intégration par parties

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+1)\cos t \,\mathrm{d}t = \left[(t^2+1)\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin t \,\mathrm{d}t$$

puis, par une nouvelle intégration par parties

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+1)\cos t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} + 1 - [-2t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} + 1 - 2[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

En conclusion,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+1)\cos t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} - 1.$$

4. On effectue le changement de variable $y = \ln t$. Si $t = 1$, $y = 0$ et si $t = e$, $y = 1$. On remplace dans l'intégrale t par e^y et $\ln t$ par y. On a $\mathrm{d}t = e^y \mathrm{d}y$. La fonction exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t+1)}$ est continue sur $[1,e]$ donc, par la formule de changement de variable :

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t+1)} = \int_0^1 \frac{e^y}{e^y(y+1)}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y+1}\mathrm{d}y = [\ln|1+y|]_0^1 = \ln 2.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variable $t = \ln y$. Si $t = 0$, $y = 1$ et si $t = x$, $y = e^x$. On remplace dans l'intégrale e^t par y et e^{-t} par $\frac{1}{y}$. On a $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{y}$. La fonction ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, e^x]$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$ est continue sur $[0,x]$ donc, par la formule de changement de variable :

$$\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t = \int_1^{e^x} \frac{2}{y+\frac{1}{y}}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_1^{e^x} \frac{2}{1+y^2}\mathrm{d}y = 2[\arctan y]_1^{e^x} = 2\arctan e^x - 2\arctan 1 = 2\arctan e^x - \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion, avec l'intégrale, une primitive de $\frac{1}{\operatorname{ch}}$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$x \mapsto 2\arctan e^x.$$

Exercice 3 Une primitive inverse de polynôme de degré 3

1. De façon analogue à la formule de la somme géométrique, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1 = (x-1)P(x)$$

où on a posé $P(X) = X^2 + X + 1$.

2. Le polynôme P n'a pas de racine réelle (son discriminant est strictement négatif) donc avec la fonction précédente, la fonction polynomiale $x \mapsto x^3 - 1$ s'annule uniquement en 1. Ainsi, φ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme inverse d'une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ s'annulant uniquement en 1.

3. On procède par analyse synthèse. Supposons qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\varphi(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+x+1} = A + \frac{(Bx+C)(x-1)}{x^2+x+1}$$

qui donne, en prenant $x=1$, $A=\frac{1}{3}$. On a également, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{3(x-1)} + \frac{Bx^2+C}{x^2+x+1}$$

qui donne en faisant tendre x vers $+\infty$, $0 = \frac{1}{3} + B$, c'est-à-dire $B = -\frac{1}{3}$. On considère ensuite le cas $x=0$ qui donne

$$\frac{1}{-1} = -\frac{1}{3} + \frac{C}{1}$$

qui donne $C = -\frac{2}{3}$.
Réciproquement, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{x^3-1}\left[\frac{1}{3}(x^2+x+1) - \frac{1}{3}(x+2)(x-1)\right] = \frac{1}{x^3-1}.$$

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{x^3-1}.$$

4. On pose $I =]-\infty, 1[$ ou $I =]1, +\infty[$. Une primitive sur I de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est donnée par $x \mapsto \ln|x-1|$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est de la forme u'/u où $u : x \mapsto x^2+x+1$ donc une primitive de $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$x \mapsto \ln|x^2+x+1| = \ln(x^2+x+1)$$

par positivité de u sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et (ceci a été fait en cours) une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

En conclusion, une primitive de φ sur I est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Exercice 4 *(facultatif : Exercice Oral CCP PC)*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et admet des primitives sur $\mathbb{R}$. L'unique primitive de f_n sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 s'écrit

$$F_n : x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(x)$.

2. En effectuant le changement de variable $x = \tan y$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_2(x) = \int_0^{\arctan x} \frac{1+\tan^2 y}{(1+\tan^2 y)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\arctan x} \underbrace{\cos^2 y}_{=\frac{1+\cos(2y)}{2}}\,\mathrm{d}y$$

qui donne

$$F_2(x) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{\arctan x} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\sin(2\arctan x).$$

Or, pour $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y) = \tan(y)\cos^2 y = \dfrac{\tan y}{1+\tan^2 y}$ et avec l'égalité précédente, on obtient

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{\tan(\arctan x)}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} = \underbrace{\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}}_{=F_n(x)} - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

On effectue une intégration par partie dans la dernière intégrale pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^x t\left(2t(1+t^2)^{-n-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[t\left(-\frac{1}{n}(1+t^2)^{-n}\right)\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x -\frac{1}{n}(1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2n}\,\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n}F_n(x)
\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) + \frac{1}{2n}\,\frac{x}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{2n}F_n(x)$$

ce qui s'écrit

$$F_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}F_n(x) + \frac{1}{2n}\,\frac{x}{(1+x^2)^n}.$$