Ce devoir est à rédiger individuellement pour la date précisée. On prendra garde à la rédaction et au soin apporté à la copie.

Exercice 1 Intégrales de Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est d'étudier les intégrales de la forme, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$ et que si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:
$$\cos(t)^{n+1} \leq \cos(t)^n.$$
On admet dans la suite que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.
4. Justifier que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant que $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)^{n+1} \,\mathrm{d}t$ et en effectuant une intégration par parties, montrer que
$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \,\mathrm{d}t = (n+1)\big(W_n - W_{n+2}\big).$$
6. En déduire que la suite $\big((n+1)\,W_{n+1}\,W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On précisera la valeur de cette constante.
7. En justifiant le fait que pour tout entier $n \geq 2$, $n\,W_n = (n-1)\,W_{n-2}$, montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$W_{2p} = \frac{2p}{2p} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2}\,W_0.$$
8. Conclure que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2 Des primitives et des intégrales

1. Déterminer, sur un intervalle que l'on précisera, une primitive de : $x \mapsto \dfrac{1}{x\,(1+\ln^2 x)}$.
2. Trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{A}{x-1}$$
puis déterminer, sur un intervalle que l'on précisera, une primitive de : $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.
3. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+1)\cos t \,\mathrm{d}t$.
4. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t + 1)}$ (on pourra effectuer le changement de variable $y = \ln t$).
5. Calculer l'intégrale, pour $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\, t}$ (on pourra effectuer le changement de variable $t = \ln y$). Déterminer ainsi, sur un intervalle que l'on précisera, une primitive de $\frac{1}{\mathrm{ch}}$.

Exercice 3 Une primitive inverse de polynôme de degré 3

On considère la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1}.$$

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = (x-1)P(x)$ où P est un polynôme de degré 2 à déterminer.
2. Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. Montrer qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\varphi(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

   On déterminera d'abord A comme d'habitude puis pour B, on pourra étudier la limite de $x \mapsto x\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Déterminer finalement une primitive de φ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 4 *(facultatif : Exercice Oral CCP PC)*

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n, l'unique primitive s'annulant en 0 de $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Justifier l'existence de F_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer F_1.
2. En effectuant le changement de variable $x = \tan y$, calculer F_2.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} F_n(x) + \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

   On pourra effectuer une intégration par parties.