Exercice 1 *Une limite de somme*

1. Supposons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

Ainsi, en étendant l'égalité précédente, on a :

(a) pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, -2\}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = a + \frac{kb}{k+1} + \frac{kc}{k+2};$$

(b) pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -2\}$,

$$\frac{1}{k(k+2)} = b + \frac{(k+1)a}{k} + \frac{(k+1)c}{k+2};$$

(c) pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = c + \frac{(k+2)a}{k} + \frac{(k+2)b}{k+1};$$

donc en prenant succesivement $k = 0, -1, -2$, on obtient $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$. En mettant au même dénominateur, on a bien, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, en changeant d'indice et en séparant les premier et dernier terme ,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1 + \frac{1}{n+1}.$$

et, de la même manière, cette fois en séparant les deux premiers et les deux derniers termes,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$

puis avec la question précédente

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}.$$

Exercice 2 Somme trigonométrique

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. On a $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$ donc, avec l'expression de la somme géométrique,

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{ix}\right)^k = \frac{\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^{n+1} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}x}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{n+1}{2}x} - \mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}\right)}$$

puis

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \mathrm{e}^{i\frac{n}{2}x} \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. De la même manière, en remplaçant x par $-x$ (on a toujours $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$) dans l'expression précédente

$$D_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-ikx} = \mathrm{e}^{-i\frac{n}{2}x} \frac{\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}x} - \mathrm{e}^{-i\frac{n+1}{2}x}}{\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(-\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{x}{2}\right)} = \mathrm{e}^{-i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

par imparité de la fonction sin.

3. Soit $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a, avec les expressions précédentes, par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx}}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-ikx}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[D_n(x) + D_n(-x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \mathrm{e}^{-i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{n}{2}x} + \mathrm{e}^{i\frac{n}{2}x}}{2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $x \in]0, 2\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\cos(kx) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ donc, par opération sur les limites

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1.$$

De plus, comme $\frac{\sin u}{u} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 1$, on a, par opération sur les limites

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} &= \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\frac{(n+1)x}{2}} \frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{\frac{(n+1)x}{2}}{\frac{x}{2}} \\
&= (n+1)\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\frac{(n+1)x}{2}} \frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} (n+1) \times 1 \times \frac{1}{1} = n + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque x tend vers 0, les deux formules sont cohérentes.

Exercice 3 *Une équation dans $\mathbb{C}$*

Solutions sous forme trigonométrique

1. On a $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, en posant $Z = z^4$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} z^8 - 2(i\sqrt{3}-1)z^4 - 8(1+i\sqrt{3}) = 0 &\iff Z^2 - 4jZ + 16j^2 = 0 \\ &\iff Z^2 - 2(i\sqrt{3}-1)Z - 8(1+i\sqrt{3}) = 0 \\ &\iff Z^2 - 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ &\iff Z^2 - 4jZ + 16j^2 = 0 \end{aligned}$$

2. On considère l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$Z^2 - 4jZ + 16j^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (-4j)^2 - 4 \times 16j^2 = (16-64)j^2 = -48j^2 = i^2(4\sqrt{3})^2 j^2 = (i \times 4\sqrt{3}j)^2.$$

Ainsi $(i \times 4\sqrt{3}j)^2$ est une racine de $\Delta \neq 0$ donc les solutions de l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$Z^2 - 4jZ + 16j^2 = 0$$

sont

$$\frac{4j - i \times 4\sqrt{3}j}{2} = -4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)j = -4j^2 \quad \text{et} \quad \frac{4j + i \times 4\sqrt{3}j}{2} = -4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)j = -4\bar{j}j = -4$$

car $\bar{j}j = 1$.

3. En combinant les deux questions précédentes, pour tout $z \in \mathbb{C}$, en posant $Z = z^4$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} z^8 - 2(i\sqrt{3}-1)z^4 - 8(1+i\sqrt{3}) = 0 &\iff Z^2 - 4jZ + 16j^2 = 0 \\ &\iff Z = -4 \quad \text{ou} \quad Z = -4j^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$z^8 - 2(i\sqrt{3}-1)z^4 - 8(1+i\sqrt{3}) = 0 \iff z^4 = -4 \quad \text{ou} \quad z^4 = -4j^2.$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. En posant $Z = \frac{z}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$, on a les équivalences, par le théorème des racines de l'unité,

$$\begin{aligned} z^4 = -4 &\iff z^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \\ &\iff \left(\frac{z}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^4 = 1 \\ &\iff Z^4 = 1 \\ &\iff Z = e^{i\frac{2k\pi}{4}} \text{ pour } k \in [\![0,3]\!] \\ &\iff z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2k\pi}{4}} \text{ pour } k \in [\![0,3]\!] \\ &\iff z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)} \text{ pour } k \in [\![0,3]\!] \end{aligned}$$

et de la même manière

$$z^4 = -4j^2 \iff z^4 = 4\mathrm{e}^{i\left(\pi + \frac{4\pi}{3}\right)} = 4\mathrm{e}^{i\left(\pi + \frac{4\pi}{3}\right)} = 4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4$$
$$\iff z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right)} \text{ pour } k \in [\![0,3]\!].$$

Finalement, l'équation d'inconnue $z \in C$: $z^8 - 2(i\sqrt{3}-1)z^4 - 8(1+i\sqrt{3}) = 0$ possède huit solutions données par les expressions

$$z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right)}$$

pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Solutions sous forme algébrique

5. On a

$$p = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad q = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$$

6. On a la construction

construction.png

On a, par définition de l'argument d'un complexe

$$\left(\vec{i}, \vec{OQ}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\vec{OP}, \vec{OQ}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

7. On a $OP = OQ = 2$ par définition du module d'un nombre complexe donc le triangle POQ est isocèle.
8. On a $q = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}(\sqrt{3}-i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{3}-i) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} + i\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$ donc

$$2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} + i\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

donc par égalité des parties réelles

$$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Finalement

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}.$$

9. D'une part, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$, on a $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+0\frac{\pi}{2}\right)} = 1+i$, $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+1\frac{\pi}{2}\right)} = -1+i$, $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\frac{\pi}{2}\right)} = -1-i$ et $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+3\frac{\pi}{2}\right)} = 1-i$. D'autre part,

$$\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+0\frac{\pi}{2}\right)} = q, \quad \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+1\frac{\pi}{2}\right)} = iq, \quad \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+2\frac{\pi}{2}\right)} = -q \quad \text{et} \quad \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+2\frac{\pi}{2}\right)} = -iq.$$

En conclusion, les solutions de l'équation d'inconnue $z \in C$:

$$z^8 - 2(i\sqrt{3}-1)z^4 - 8(1+i\sqrt{3}) = 0$$

sont

$$1+i, \quad 1-i, \quad -1+i, \quad -1-i, \quad \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} + i\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} + i\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

et

$$-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}-i\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}-i\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Exercice 4 *Une équation fonctionnelle (facultatif)*

On considère dans la suite une fonction f solution du problème $\mathscr{P}$.

1. Posons $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+,*}$, vérifie $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a

$$\varphi(x\varphi(y)) = \frac{1}{x\varphi(y)} = \frac{y}{x} = y\varphi(x).$$

   Finalement, la fonction inverse vérifie $\mathscr{P}$.

2. Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $f(y) = y$ et que $y > 1$. On a, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $f(xy^n) = y^n f(x)$ donc si $f(x) \neq 0$,

$$f(xy^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$$

   selon le signe de $f(x)$ ce qui est impossible compte-tenu de la condition $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $f(x) = 0$.

3. Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $f(y) = y$. Si $y > 1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ ce qui est impossible car f est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+,*}$. Si $y < 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$,

$$f\left(\frac{x}{y}y\right) = yf\left(\frac{x}{y}\right)$$

   et par le même raisonnement que précédement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(xy^{-n}) = y^{-n}f(x)$ qui n'aura pas une limite finie lorsque $n \to \infty$ si $f(x) \neq 0$.
   Les cas $y > 1$ et $y < 1$ mènent à des contradictions donc $y = 1$.

4. La question 1 montre que la fonction inverse est solution de $\mathscr{P}$. Soit f une solution de $\mathscr{P}$ et $x \in \mathbb{R}^{+,*}$. Posons $y = xf(x)$. On a

$$f(y) = f(xf(x)) = xf(x) = y$$

   donc, avec les questions précédentes, $y = 1 = xf(x)$ donc $f(x) = \frac{1}{x}$. En conclusion, $\mathscr{P}$ admet une unique solution : la fonction inverse.
