DM2

Ce devoir est à rendre pour le mardi 25 septembre à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses.

Exercice DM2.1

1. Dans cette question, on considère la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x^3 - 3x. \end{array} \right.$$

   (a) Dresser le tableau de variations de g et donner ses limites en $\pm\infty$.

   (b) Déterminer le(s) réel(s) x tel(s) que $g(x) = 1$, puis tel(s) que $g(x) = -1$.

   (c) En déduire que, pour tout réel x,

$$|4x^3 - 3x| \leq 1 \iff x \in [-1, 1].$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} g(x) = \operatorname{Arcsin}(4x^3 - 3x).$$

2. (a) Déduire de la question 1.(c) l'ensemble de définition de f.

   (b) Donner sans calcul le tableau de variations de f.

3. (a) Donner l'ensemble de dérivabilité de f.

   (b) Déterminer des réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -16x^6 + 24x^4 - 9x^2 + 1 = (1 - x^2)(ax^2 + bx + c)^2.$$

   (c) Calculer $f'(x)$ en tout réel x où f est dérivable.

   (d) Donner les valeurs de f en 0, en $\sqrt{2}/2$ et en $-\sqrt{2}/2$.

   (e) En déduire une expression simplifiée de f.

4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice DM2.2

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{1 + 2\cos(\pi/3)}{3} \times \frac{1 + 2\cos(\pi/3^2)}{3} \times \cdots \times \frac{1 + 2\cos(\pi/3^n)}{3}$$

que l'on note également $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1 + 2\cos(\pi/3^k)}{3}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Exprimer, lorsque c'est possible, $\dfrac{\sin(3y)}{\sin y}$ en fonction de $\cos(2y)$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer une expression simplifiée de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que : $\dfrac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.
4. Conclure.