Ce devoir est à rédiger individuellement pour la date précisée. On prendra garde à la rédaction et au soin apporté à la copie.

Exercice 1 *Une limite de somme*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1 + \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

3. En déduire une expression de S_n en fonction de n.

Exercice 2 Somme trigonométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. On définit :

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx).$$

1. Montrer les deux égalités :

$$D_n(x) = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Établir une expression analogue pour $D_n(-x)$.
3. En justifiant que $C_n(x) = \frac{1}{2}[D_n(x) + D_n(-x)]$, montrer que

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4. Quelle est la limite de $C_n(x)$ lorsque x tend vers 0 ? Quelle cohérence y a-t-il entre la formule de la question 3 et la définition de $C_n(x)$?

Exercice 3 *Une équation dans* $\mathbb{C}$

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation d'inconnue $z \in C$:

$$z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Solutions sous forme trigonométrique

1. Déterminer la forme algébrique de j puis montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, en posant $Z = z^4$, on a

$$z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0 \Longleftrightarrow Z^2 - 4jZ + 16j^2 = 0.$$

2. Montrer que le discriminant Δ de l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$Z^2 - 4jZ + 16j^2 = 0$$

vérifie $\Delta = (i \times 4\sqrt{3}j)^2$ puis en déduire que les solution de cette équation sont -4 et $-4j^2$.

3. Justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence :

$$z^8 - 2(i\sqrt{3}-1)z^4 - 8(1+i\sqrt{3}) = 0 \Longleftrightarrow z^4 = -4 \quad \text{ou} \quad z^4 = -4j^2.$$

4. Montrer finalement que l'équation d'inconnue $z \in C$: $z^8 - 2(i\sqrt{3}-1)z^4 - 8(1+i\sqrt{3}) = 0$ possède huit solutions données par les expressions

$$z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)}$$

pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Solutions sous forme algébrique

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points P et Q du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs $p = \sqrt{3} - i$ et $q = e^{i\frac{\pi}{4}}p$.

5. Exprimer p puis q sous forme trigonométrique.
6. Placer P et Q sur un dessin et déterminer une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{OQ}\right)$ et de l'angle $\left(\vec{OP}, \vec{OQ}\right)$.
7. Quelle est la nature du triangle POQ ? On justifiera la réponse.
8. Déterminer la valeur de q sous forme algébrique puis en déduire que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}.$$

9. Écrire les solutions de l'équation d'inconnue $z \in C$: $z^8 - 2(i\sqrt{3}-1)z^4 - 8(1+i\sqrt{3}) = 0$ sous forme algébrique.

Exercice 4 *Une équation fonctionnelle (facultatif)*

On souhaite déterminer dans cet exercice toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+,*}$ vérifiant $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+,*}, \quad f(xf(y)) = yf(x).$$

On appellera $\mathscr{P}$ ce problème posé.

1. Justifier que la fonction inverse vérifie $(\mathscr{P})$.
2. On suppose qu'il existe $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $f(y) = y$. Montrer que si $y > 1$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ (on étudiera la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et $f(xy^n)$ lorsque $x \in \mathbb{R}^{+,*}$).
3. Montrer que s'il existe $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $f(y) = y$ alors $y = 1$.
4. Résoudre finalement le problème $\mathscr{P}$.
