### Exercice 1

1. La fonction $\varphi$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = 2x+1.$$

On obtient le tableau, puisque $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$,

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | | $+$ | | |
| $\varphi(x)$ | | $\searrow$ | $\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ | |

La fonction $\varphi$ admet un minimum en $-\frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{3}{4}$.

2. Comme la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$, que $\varphi > 0$ sur $\mathbb{R}$ et que $f = \sqrt{\varphi}$, la fonction $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par composition,

$$f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

4. Comme $x^2+x+1 \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par composition,

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La fonction $f'$ étant du signe de $\varphi'$, on a le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5. La fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. D'après le théorème de la bijection, $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[ = [1,+\infty[$. En conclusion, $f$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

### Exercice 2

1. La fonction $g$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions définies et dérivables sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in ]0,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

qui est du signe de $1-x$. On obtient le tableau, comme $g(1) = -2$,

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | |

donc la fonction $g$ est négative sur $]0,+\infty[$.

2. Avec la question précédente et les propriétés de ln, pour tout $x \in ]1, +\infty[$,

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$$

donc

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x}.$$

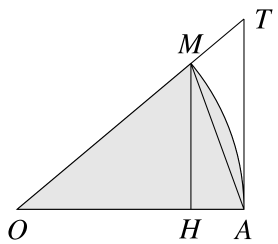
En conclusion, pour tout $x \in ]1, +\infty[$,

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

3. On sait que $\frac{2}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par théorème d'encadrement,

$$\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ une mesure de l'angle orienté $\widehat{AOM}$. On a $\mathscr{A} \times 2\pi = \pi 1^2 \times x$ donc $\mathscr{A} = \frac{1}{2}x$. Considérons la hauteur du triangle $OAM$ issue de $M$. Celle-ci coupe $(OA)$ en un point $H$. On a le schéma :




Ainsi, si on note $\mathscr{A}_{OAM}$ l'aire du triangle $OAM$, on a :

$$\mathscr{A}_{OAM} = \frac{1}{2} \times OA \times HM = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin x.$$

En conclusion, $\mathscr{A} = \frac{1}{2}x$ et l'aire du triangle $OAM$ vaut $\frac{1}{2}\sin x$.

5. En considérant la hauteur du triangle $OAM$ comme dans la question précédente, on a, en appliquant le théorème de Thalès :

$$\frac{OH}{OA} = \frac{HM}{AT} = \frac{OM}{OT}$$

qui donne

$$\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{AT}$$

donc comme le triangle $OAT$ est rectangle en $A$, en notant $\mathscr{A}_{OAT}$ son aire, on obtient :

$$\mathscr{A}_{OAT} = \frac{1}{2} OA \times AT = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}.$$

En conclusion, l'aire du triangle $OAT$ vaut $\frac{1}{2}\tan x$.

6. Avec les notations des question précédentes, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\mathscr{A}_{OAM} \leq \mathscr{A} \leq \mathscr{A}_{OAT}$$

ce qui s'écrit

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x.$$

En conclusion, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\sin x \leq x \leq \tan x.$$

7. Avec les inégalités précédentes, on a, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{et} \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x}.$$

On sait que $\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc, par théorème d'encadrement,

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

Avec le même raisonnement pour la limite en $0^-$, on obtient finalement

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

---

**Exercice 3**

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $x > -x$ alors, par stricte croissance de exp, $e^x > e^{-x}$. Si $x \in \mathbb{R}^{-,*}$, $x < -x$ alors, par stricte croissance de exp, $e^x < e^{-x}$. Si $x = 0$, $e^x = e^{-x} = 1$. Finalement, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $e^x - e^{-x}$ est du même signe que $x$.
2. En tant qu'inverse de fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f$ est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ lorsque son dénominateur ne s'annule pas c'est-à-dire lorsque $x \neq 0$. Ainsi, $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((e^x - e^{-x})^{-2}\right) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)^{-2-1} = 2\frac{e^x + e^{-x}}{(e^{-x} - e^x)^3}.$$

3. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ qui est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \frac{1}{(e^{-x} - e^x)^2} = \frac{1}{(e^x - e^{-x})^2} = f(x)$$

donc $f$ est paire. Il suffit ainsi d'étudier $f$ sur $]0, +\infty[$.

4. On a $(e^x - e^{-x})^2 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$ et $(e^x - e^{-x})^2 \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par opération

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0^+.$$

De plus, avec les questions 1 et 2, lorsque $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $-x$. On a ainsi le tableau :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0^+$ |

5. Avec l'étude précédente et par parité, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ donc par le théorème de la bijection, $f$ réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ sur $f(]-\infty, 0[) = ]0, +\infty[$.
6. L'application $f_1$ n'est pas une bijection car elle n'est pas surjective. En effet, $-1 \notin f_1(]-\infty, 0[) = ]0, +\infty[$ donc $-1$ n'a pas d'antécédent par $f_1$. En revanche, $f_1$ est injective car elle est strictement croissante.

   L'application $f_2$ n'est pas une bijection car elle n'est pas injective. En effet, $f_2(1) = f_2(-1)$ (par parité) alors que $1 \neq -1$ : 1 et $-1$ ont la même image. En revanche, $f_2$ est surjective car $f_2(\mathbb{R}^*) = f(]-\infty, 0[) = ]0, +\infty[$ donc tout élément de $]0, +\infty[$ admet au moins un antécédent par $f_2$.

   L'application $f_3$ n'est ni injective, ni surjective et donc non bijective. En effet, $f_3(1) = f_3(-1)$ (par parité) alors que $1 \neq -1$ : 1 et $-1$ ont la même image donc $f_3$ n'est pas injective. De plus, $-1 \notin f_3(\mathbb{R}^*) = f(]-\infty, 0[) = ]0, +\infty[$ donc $-1$ n'a pas d'antécédent par $f_3$ : $f_3$ n'est pas surjective.

7. Soit $x \in ]-\infty, 0[$ et $y \in ]0, +\infty[$. On a les équivalences, en posant $X = e^x > 0$ :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{1}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &\iff \frac{1}{y} = (e^x - e^{-x})^2 \\ &\iff -\frac{1}{\sqrt{y}} = e^x - e^{-x} \\ &\iff -\frac{1}{\sqrt{y}} = X - \frac{1}{X} \\ &\iff -\frac{1}{\sqrt{y}} X = X^2 - 1 \\ &\iff X^2 + \frac{1}{\sqrt{y}} X - 1 = 0 \end{aligned}$$

où la troisième équivalence vient du fait que $e^x - e^{-x} < 0$ car $x < 0$. La dernière équation est un trinôme du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{y} + 4 = \frac{1+4y}{y} > 0$ donc les solutions de l'équation d'inconnue $X \in \mathbb{R}$ : $X^2 + \frac{1}{\sqrt{y}} X - 1 = 0$ sont :

$$\frac{-\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1+4y}{y}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2\sqrt{y}} \quad \text{et} \quad \frac{-1 - \sqrt{1+4y}}{2\sqrt{y}} < 0.$$

Or, lorsque $x \in ]-\infty, 0[$, $X = e^x > 0$ donc on a finalement l'équivalence :

$$y = f(x) \iff e^x = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2\sqrt{y}} \iff x = \ln\left(\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2\sqrt{y}}\right).$$

En conclusion, l'application réciproque de la bijection de la question 5 est

$$g : \begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ & \longrightarrow & ]-\infty, 0[ \\ x \mapsto \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{x}}\right) \end{array}$$

---

**Exercice 4** Une valeur trigonométrique

---

Soit $\omega$ le nombre complexe $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose : $A = \omega^2 + \omega^3$ et $B = \omega + \omega^4$.

1. Le nombre complexe $\omega$ est une racine cinquième de l'unité donc on a $\omega^5 = 1$. Ainsi, $\omega^6 = \omega^5 \omega = \omega$ et $\omega^7 = \omega^5 \omega^2 = \omega^2$.
2. Comme $\omega \neq 1$, on a :

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = \frac{1 - 1}{\omega - 1} = 0.$$

3. On a $\frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ donc

$$\mathrm{Re}(A) = \underbrace{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}_{<0} + \underbrace{\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)}_{<0} < 0.$$

4. On a : $A + B = \omega^2 + \omega^3 + \omega + \omega^4 = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 - 1 = 0 - 1 = -1$ et

$$AB = (\omega^2 + \omega^3)(\omega + \omega^4) = \omega^3 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^7 = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1.$$

5. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(z-A)(z-B) = z^2 - (A+B)z + AB = z^2 + z - 1.$$

6. Avec la question précédente, $A$ et $B$ sont les racines du polynôme $X^2 + X - 1$. Les racines de ce polynômes sont

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

donc, comme $A < 0$, on a

$$B = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

7. Par $2\pi$-périodicité de cos, on a

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

et, par formule de symétrie, on a

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

8. Avec les questions précédentes, on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}A = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

---

**Exercice 5** Un produit *(facultatif)*

---

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

1. Posons $A(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$ et $B(X) = X^n - 1$. Ces deux polynômes ont le même degré et ont pour racines les racines de l'unité $1, \omega, \cdots, \omega^{n-1}$ donc ces deux polynômes sont égaux. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$A(z) = (z-1)\prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k) = B(X) = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

qui donne, lorsque $z \neq 1$, en divisant par $z-1$ :

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell.$$

2. Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ :

$$\varphi : x \mapsto \prod_{k=0}^{n-1}(x - \omega^k) \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

sont des polynômes donc sont des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et ces fonctions sont égales sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ainsi, par continuité, $\varphi(1) = \psi(1)$. L'égalité précédente est aussi vraie lorsque $z = 1$.

3. Avec la question précédente, on obtient

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} 1^\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = n.$$

On va transformer l'expression de gauche. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$1-\omega^k = 1-e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = e^{\frac{ik\pi}{n}}(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

On obtient :

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k) = \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \times \prod_{k=1}^{n-1}(-2i) \times \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

qui donne

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k) = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+3+\cdots+n-1)}(-2i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

donc

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k) = e^{\frac{i\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{n-1}2^{n-1}i^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \underbrace{\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1} i^{n-1}}_{(i^2)^{n-1}=(-1)^{n-1}}(-1)^{n-1}2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

En conclusion,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$