

DM13

Ce devoir est à rendre pour le mardi 5 février à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM13.1

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p , c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ entre p_{n+1} et p_n .
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de $n \in \mathbb{N}$.
3. Dans quel cas (p_n) est-elle convergente? Commenter le résultat.

Exercice DM13.2

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est continue sur \mathcal{D} .
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathcal{D} \setminus \{0\}$.
(b) Soit $x \in \mathcal{D}$. Montrer que :

$$\ln(1+x) - x = \int_0^x \frac{-t}{1+t} dt.$$

- (c) En déduire que si $x > 0$, alors :

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq \int_0^1 \frac{-h}{1+x} dh.$$

On pourra utiliser la question précédente et effectuer le changement de variable $t = xh$.

- (d) Déterminer une inégalité analogue à la précédente, pour $x \in]-1, 0[$.
- (e) En déduire que f est dérivable en 0 et montrer que $f'(0) = \frac{-1}{2}$.
- (f) La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathcal{D} ?
3. Étudier les variations de f . On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie sur \mathcal{D} par :

$$k(x) = x - (1+x) \ln(1+x).$$