DM12

Ce devoir est à rendre pour le mardi 29 janvier à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM12.1

Soient O, A, B trois points alignés du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} = 1$. Soit Δ la perpendiculaire à (AB) passant par B, et soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$. On pose $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ le vecteur tel que $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ soit un repère orthonormé direct du plan ; dans tout l'exercice, les coordonnées considérées seront exprimées dans ce repère.

Pour tout point $P \in \Delta$, on appelle N_1 et N_2 les points d'intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ passant par P avec la parallèle à Δ passant par O. L'objectif est de montrer que le centre de gravité du triangle PN_1N_2 ne dépent pas de P.

1. Faire un dessin.

On pose $p = \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{\jmath}$, $m_1 = \overrightarrow{ON_1} \cdot \overrightarrow{\jmath}$ et $m_2 = \overrightarrow{ON_2} \cdot \overrightarrow{\jmath}$.

2. Donner sans démonstration les coordonnées de O, A, B, P, N_1 et N_2.

Soit N un point de la parallèle à Δ passant par O, et m l'ordonnée de N.

3. Déterminer une équation de la droite (PN).
4. Montrer que (PN) est tangente à $\mathscr{C}$ si et seulement si $2m^2 + 2pm - 1 = 0$ (on pourra traduire le fait que (PN) est tangente à $\mathscr{C}$ en terme de distances).
5. En déduire les valeurs de m_1 et de m_2 en fonction de p.
6. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{ON_1} \cdot \overrightarrow{ON_2}$ ne dépend pas de P.

Dans les questions qui suivent, on se place dans le triangle PN_1N_2.

7. Déterminer en fonction de m_1 et m_2 l'équation de la médiane issue de N_1. Faire de même pour la médiane issue de N_2.
8. Montrer que le centre de gravité du triangle PN_1N_2 ne dépend pas de P.

Exercice DM12.2

Dans cet exercice, on considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de g. Dans les questions qui suivent, on notera $\mathcal{D}$ cet ensemble.
2. Calculer les limites de g en $\pm\infty$.
3. Justifier que g est dérivable sur $\mathcal{D}$ et que
$$\forall x \in \mathcal{D},\ g'(x) = \frac{h(x)}{x(\mathrm{e}^x - 1)}$$
où h est une fonction défnie sur $\mathbb{R}$ à préciser.
4. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de variations de g (on ne précisera pas la limite de g ailleurs qu'en $\pm\infty$).
5. Montrer que g est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ et préciser le signe du prolongement ainsi obtenu.

Dans la suite de l'exercice, on note f le prolongement par continuité de g à $\mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par
$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ ont même signe. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_n$?

On admet dans la suite de l'exercice que $f(2) \leqslant 2$.

7. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente.
8. Déterminer sa limite (on pourra utiliser les résultats de la question 4 sur les variations de h).