DM11

Ce devoir est à rendre pour le mardi 15 janvier à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM11.1

Soient a, b, n trois entiers supérieurs ou égaux à 1. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b.

1. Montrer que $0 \leqslant rb^n + b^n - 1 < b^{n+1}$.
2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice DM11.2

On considère une protéine constituée de la succession linéaire d'acides aminés de cystéine, d'aspartate et de glutamate que l'on désignera respectivement par les lettres C, D et E. Cette protéine vérifie de plus la propriété suivante : sa structure primaire peut-être représentée par des séquences successives de lettres **telles que chaque séquence commence par la lettre C et ne comporte jamais deux lettres consécutives identiques**. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note S_n l'ensemble des séquences possibles de n lettres et on considère les sous-ensembles C_n, D_n et E_n de séquences de S_n qui se terminent respectivement par C, D et E. On pose $c_n = \mathrm{card}(C_n)$, $d_n = \mathrm{card}(D_n)$ et $e_n = \mathrm{card}(E_n)$.

1. Justifier que $c_1 = 1$, $d_1 = 0$ et $e_1 = 0$.
2. Justifier que $c_2 = 0$, $d_2 = 1$ et $e_2 = 1$.
3. Déterminer c_3, d_3 et e_3.
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{card}(S_n)$ et en déduire que $c_n + d_n + e_n = 2^{n-1}$.
5. En étudiant l'avant-dernière lettre des séquences de C_{n+1}, démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que
$$c_{n+1} = d_n + e_n.$$
6. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $d_n = e_n$. On pourra chercher une bijection entre D_n et E_n.
7. À l'aide des questions précédentes, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $c_{n+2} = c_{n+1} + 2c_n$.
8. En déduire l'expression de c_n, d_n et e_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.