DM10

Ce devoir est à rendre pour le mardi 8 janvier à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée et on indiquera les trois noms sur la première page.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses. Encadrez vos réponses.

Exercice DM10.1

Dans cet exercice, on note $\mathcal{D}$, I, J et J' les ensembles suivants :

$$\mathcal{D} = [0,2],\ I = [0,1[\,,\ J =]1,2] \text{ et } J' = \left]1, \sqrt{2}\right].$$

On définit une fonction f sur $\mathcal{D}$ par

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) = \sqrt{2-x}.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}$.
2. Montrer que $f(J) \subset I$ et que $f(I) \subset J'$. En déduire que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un réel $a \in [0,1[$, et l'on considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{2-u_n}.$$

3. Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \sqrt{2}\right]$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} < 1 < u_{2n+1}.$$

   On pourra utiliser les résultats de la question 2. Est-il possible que la suite $(u_n)_n$ soit monotone à partir d'un certain rang ?

On étudie dans les parties suivantes la convergence de la suite $(u_n)_n$ par deux méthodes distinctes. On admettra le résultat suivant : pour toute suite réelle ou complexe $(a_n)_n$, si $(a_{2n})_n$ et $(a_{2n+1})_n$ ont une limite commune l (finie ou infinie), alors $(a_n)_n$ converge vers l.

Convergence de $(u_n)_n$, première méthode.

Dans cette partie, on pose $g = f \circ f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{2n} \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{2n+1}.$$

On remarque en particulier que, pour tout entier n, $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$.

5. Résoudre l'équation $g(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,2]$. On pourra montrer que pour tout $x \in [0,2]$, si x est solution, alors

$$x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0$$

   puis chercher deux racines évidentes de ce polynôme.
6. Quel est le signe de $g(0) - 0$? Et celui de $g(2) - 2$? En déduire le signe de $x \mapsto g(x) - x$ sur $\mathcal{D}$.
7. En utilisant les résultats des questions 4 et 6, déterminer le sens de variation des suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$.
8. Montrer que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont convergentes et déterminer leurs limites. Conclure.

Convergence de $(u_n)_n$, deuxième méthode.

9. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $(x,y) \in [\alpha, +\infty[^2$:

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left|y - x\right|.$$

   On pourra distinguer selon si $x \leqslant y$ ou $x > y$, et développer le produit $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x})$.
10. En prenant $\alpha = 2 - \sqrt{2}$ dans le résultat de la question 9, et en utilisant le résultat de la question 3, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f(u_n) - 1\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\left|u_n - 1\right|.$$

11. On pose $\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$. Montrer que $\beta < 1$, puis montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 1| \leqslant \beta^n |a-1|.$$

Conclure l'exercice.

Exercice DM10.2

Dans cet exercice, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2. Donner une relation entre A^2, A et I_3. En déduire que A est inversible.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple de réels (u_n, v_n) tel que

$$A^n = u_n A + v_n I_3.$$

On donnera les valeurs de u_0 et v_0, ainsi qu'une relation, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, entre (u_{n+1}, v_{n+1}) et (u_n, v_n).

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2u_n + v_n \qquad \text{et} \qquad b_n = u_n - v_n.$$

3. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre a_{n+1} et a_n, ainsi qu'une relation entre b_{n+1} et b_n.
4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n, puis A^n, en fonction de n.