
DM1

Exercice DM1.1

On souhaite résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\pi x) > \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right). \quad (\text{I})$$

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \cos(\pi x) - \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$ est périodique de période 2.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation d'inconnue $x \in [0, 2[$:

$$\cos(\pi x) > \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Déterminer finalement l'ensemble des solutions de (I).

Exercice DM1.2

On pose $\varphi : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$. On fera une disjonction des cas selon que x est positif ou négatif.
2. En déduire que φ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
3. Déterminer les limites lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ de $x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$.
4. Dresser le tableau des variations de φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
5. Représenter graphiquement φ .
6. Montrer que φ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et que sa fonction réciproque a pour expression :

$$\psi : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$