Ce devoir est à rédiger individuellement pour la date précisée. On prendra garde à la rédaction et au soin apporté à la copie.

Exercice 1 Bijection

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

1. Déterminer, en faisant un tableau de variations, le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ définie par
$$\varphi(x) = x^2+x+1.$$
2. En déduire que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et dresser le tableau des variations de f.
5. Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

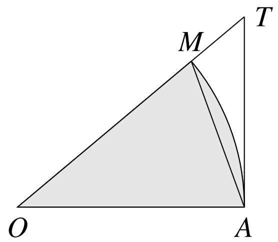
Exercice 2

On considère la fonction $g : x \mapsto \ln x - 2\sqrt{x}$.

1. En faisant un tableau de variations, déterminer le signe de g sur son ensemble de définition qu'on déterminera.
2. En déduire l'inégalité, pour tout $x \in]1,\infty[$,
$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$
3. En déduire la limite de $x \mapsto \ln x/x$ en $+\infty$.

Le but des questions suivantes est de démontrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
$$\sin x \leq x \leq \tan x.$$

On considère le schéma :



où x est l'angle orienté $\widehat{AOM}$. On notera dans la suite $\mathscr{A}$ l'aire grisée sur le dessin et on suppose que $OA = 1$.

4. Justifier que $\mathscr{A} = \frac{1}{2}x$ et que l'aire du triangle OAM vaut $\frac{1}{2}\sin x$.
5. En appliquant judicieusement le théorème de Thalès, montrer que l'aire du triangle OAT vaut $\frac{1}{2}\tan x$.
6. Conclure que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$\sin x \leq x \leq \tan x.$$
7. Déduire de cette inégalité la limite de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ en 0 (ceci a été fait en cours).

Exercice 3

On considère la fonction f donnée par l'expression : $f(x) = \dfrac{1}{(e^x - e^{-x})^2}$.

1. Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $e^x - e^{-x}$ est du même signe que x.
2. En déduire que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer la dérivée de f.
3. Quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle sur lequel il suffit d'étudier f.
4. Dresser le tableau des variations de f en calculant au préalable les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty,0[$ sur un ensemble que l'on déterminera.
6. Dire dans chaque cas suivant si l'application est injective, surjective ou ni l'un ni l'autre (on justifiera les réponses) :

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-\infty,0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & f(x) \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

7. Soit $y \in]0,+\infty[$. En résolvant l'équation d'inconnue $x \in]0,+\infty[$

$$y = f(x),$$

montrer que l'application réciproque de la bijection de la question 5 est

$$g : \begin{array}{c}]0,+\infty[\quad \longrightarrow \quad]-\infty,0[\\ x \mapsto \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{x}}\right) \end{array}$$

Exercice 4 Une valeur trigonométrique

Soit ω le nombre complexe $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose : $A = \omega^2 + \omega^3$ et $B = \omega + \omega^4$.

1. Que vaut ω^5 ? Simplifier ainsi ω^6 et ω^7.
2. Déterminer la valeur de $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.
3. Montrer que $\mathrm{Re}(A) < 0$ (on pourra faire un dessin).
4. Déduire des deux questions précédentes que $A + B = -1$ ainsi que la valeur de AB.
5. Développer, pour $z \in \mathbb{C}$: $(z-A)(z-B)$.
6. En déduire que A et B sont les racines d'un trinôme du second degré et déterminer la valeur de A et B.
7. Montrer que $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$.
8. Conclure que

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 5 Un produit *(facultatif)*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

1. Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell.$$

2. Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.
3. En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$
