DM0

Ce devoir est à rendre pour le mardi 11 septembre à 8h00. Vous devez le réaliser par groupes de trois élèves. Chaque élève écrira son nom sur la partie qu'il a rédigée.

Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Une attention particulière doit être portée à la rédaction de vos réponses.

Exercice DM0.1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

et l'on note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Dans les questions 1a à 3a, on fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Justifier que f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de signes.
   (b) Déterminer les limites de f_n en 0^+ et en $+\infty$.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur son ensemble de définition et calculer f_n'.
   (b) Dresser le tableau de variations de f_n. En déduire en particulier que f_n admet un unique maximum sur son ensemble de définition.
   (c) On note A_n le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum, et (x_n, y_n) ses coordonnées. Exprimer x_n et y_n en fonction de n.
3. (a) Montrer que tous les points A_n appartiennent à la courbe d'équation $y = \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}}$.
   (b) Donner les limites de x_n et y_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donner la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On distinguera les cas $x < 1$, $x = 1$ et $x > 1$, et on prendra garde au fait que c'est n qui tend vers $+\infty$ et pas x.
5. Dans les questions qui suivent, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$, le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   (b) Donner le sens de variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle est convergente.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{x^n}.$$

   (d) Montrer que : $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.