

Développements d'analyse pour l'agrégation

Brice LOUSTAU

Table des matières

Correspondance leçons \leftrightarrow développements	4
1 Sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translations	10
2 Dénombrement des partitions de $\{1, \dots, n\}$	12
3 L'espace $H^1(I)$	14
4 Théorème d'échantillonnage de SHANNON	18
5 Formule de POISSON et application	21
6 Densité des polynômes orthogonaux	24
7 Théorème de CARTAN-VON NEUMANN	27
8 Tipi de CANTOR	29
9 Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS	32
10 Théorème de BROUWER	34
11 Théorème de GERSHGÖRIN	37
12 Théorème de JORDAN	39
13 Méthode du gradient à pas conjugué	42
14 Méthode de quadrature élémentaire de GAUSS	46
15 Théorème de HADAMARD-LÉVY	49
16 Suites équiréparties modulo 1	51
17 Méthode de NEWTON	54
18 Lemme de MORSE	56
19 Intégrale de FRESNEL	58
20 Calcul d'une intégrale	61
21 Fonctions lipschitziennes	63
22 Étude d'un système dynamique discret et de son équivalent continu	66

23	Méthode de LAPLACE	68
24	Sous-espaces fermés de L^p	70
25	Théorème de stabilité de LIAPOUNOV	72
26	Continuité des fonctions convexes	74
	Références	76

Correspondance leçons ↔ développements

Leçons	Développements
201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.	(AN01 Sous-espaces stables par translations) AN03 L'espace $H^1(I)$ AN04 Théorème de SHANNON (AN06 Densité des polynômes orthogonaux) AN21 Fonctions lipschitziennes
202 Exemples de parties denses et applications.	AN06 Densité des polynômes orthogonaux AN16 Suites équiréparties (AN21 Fonctions lipschitziennes) (AN23 Sous-espaces fermés de L^p)
203 Utilisation de la notion de compacité.	((AN08 Topologie de CANTOR)) AN09 Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS (AN10 Théorème de Brouwer) AN11 Théorème de GERSHGORIN AN12 Théorème de JORDAN AN15 Théorème de HADAMARD-LÉVY (AL16 Décomposition polaire) AL26 Continuité des fonctions convexes
204 Connexité. Exemples et applications.	AL04 Théorème de LIE-KOLCHIN AN08 Topologie de CANTOR AN09 Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS (AN10 Théorème de Brouwer) AN11 Théorème de GERSHGORIN AN12 Théorème de JORDAN AN15 Théorème de HADAMARD-LÉVY
205 Espaces complets. Exemples et applications.	AN03 L'espace $H^1(I)$ (AN04 Théorème de Shannon) (AN06 Densité des polynômes orthogonaux) ((AN08 Topologie de CANTOR)) AN23 Sous-espaces fermés de L^p
206 Utilisation de théorèmes de point fixe.	AL02 Sous-groupes compacts du groupe linéaire AN10 Théorème de BROUWER

	(AN17 Méthode de NEWTON) AL28 Théorèmes de PERRON-FROBENIUS
207 Prolongement de fonctions. Applications.	AN03 L'espace $H^1(I)$ (AN04 Théorème de Shannon) AN21 Fonctions lipschitziennes
208 Utilisation de la continuité uniforme en analyse.	((AN03 L'espace $H^1(I)$)) AN12 Théorème de JORDAN
209 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.	(AN06 Densité des polynômes orthogonaux) ((AN08 Tipi de CANTOR)) AN21 Fonctions lipschitziennes AN24 Sous-espaces fermés de L^p
210 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.	(AN03 L'espace $H^1(I)$) AN04 Théorème de SHANNON AN21 Fonctions lipschitziennes AN24 Sous-espaces fermés de L^p
211 Utilisation de la dimension finie en analyse.	(AN01 Sous-espaces stables par translations) AN10 Théorème de BROUWER AN15 Théorème de HADAMARD-LÉVY (AN25 Théorème de stabilité de LIAPOUNOV) AL26 Continuité des fonctions convexes
212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.	AN03 L'espace $H^1(I)$ AN04 Théorème de SHANNON AN06 Densité des polynômes orthogonaux AN10 Théorème de Brouwer AN13 Méthode du gradient conjugué AN14 Méthode de quadrature de GAUSS AN24 Sous-espaces fermés de L^p
213 Bases hilbertiennes. Exemples et applications.	AN04 Théorème de SHANNON AN06 Densité des polynômes orthogonaux (AN14 Méthode de quadrature de GAUSS)
214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.	AN07 Théorème de CARTAN-VON NEUMANN AN09 Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS AN10 Théorème de Brouwer AN15 Théorème de HADAMARD-LÉVY

	AN18 Lemme de MORSE
215 Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.	AN07 Théorème de CARTAN-VON NEUMANN AN09 Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS AN10 Théorème de Brouwer AN15 Théorème de HADAMARD-LÉVY AN18 Lemme de MORSE AN25 Théorème de stabilité de LIAPOUNOV
216 Étude de courbes. Exemples.	AN12 Théorème de JORDAN AN15 Théorème de HADAMARD-LÉVY (AN18 Lemme de MORSE)
217 Étude locale de surfaces. Exemples.	AN18 Lemme de MORSE
218 Applications des formules de Taylor.	AN17 Méthode de NEWTON AN18 Lemme de MORSE
219 Problèmes d'extremums.	AN13 Méthode du gradient à pas conjugué (AN18 Lemme de MORSE)
220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions	AN01 Sous-espaces stables par translations AN15 Théorème de HADAMARD-LÉVY AN22 Étude d'un système dynamique discret et de son équivalent continu AN25 Théorème de stabilité de LIAPOUNOV
221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	AN01 Sous-espaces stables par translations AN25 Théorème de stabilité de LIAPOUNOV
222 Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.	AN15 Théorème de HADAMARD-LÉVY AN22 Étude d'un système dynamique discret et de son équivalent continu (AN25 Théorème de stabilité de LIAPOUNOV)
223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.	AN13 Méthode du gradient à pas conjugué AN16 Suites équiréparties modulo 1 AN17 Méthode de NEWTON AN22 Étude d'un système dynamique discret et de son équivalent continu
224 Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.	(AN13 Méthode du gradient à pas conjugué) AN14 Méthode de quadrature de GAUSS AN16 Suites équiréparties modulo 1 AN17 Méthode de NEWTON

	<p>AN22 Étude d'un système dynamique discret et de son équivalent continu</p> <p>AL27 Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne</p>
<p>226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.</p>	<p>AN13 Méthode du gradient à pas conjugué</p> <p>AN17 Méthode de NEWTON</p> <p>AN22 Étude d'un système dynamique discret et de son équivalent continu</p>
<p>227 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.</p>	<p>AN22 Étude d'un système dynamique discret et de son équivalent continu</p> <p>AN23 Méthode de LAPLACE</p>
<p>228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.</p>	<p>AN01 Sous-espaces stables par translations (AN04 Théorème de SHANNON)</p> <p>AN19 Intégrale de FRESNEL</p> <p>AN20 Calcul d'une intégrale</p> <p>AN21 Fonctions lipschitziennes</p>
<p>229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.</p>	<p>AN17 Méthode de NEWTON</p> <p>AL26 Continuité des fonctions convexes</p>
<p>230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.</p>	<p>AN02 Dénombrement des partitions d'un ensemble fini</p> <p>AN05 Formule de POISSON et application</p>
<p>231 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.</p>	<p>AN02 Dénombrement des partitions d'un ensemble fini</p>
<p>232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.</p>	<p>AN13 Méthode du gradient à pas conjugué</p> <p>AN17 Méthode de NEWTON</p>
<p>233 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.</p>	<p>AN14 Méthode de quadrature de GAUSS (AN16 Suites équiréparties modulo 1)</p> <p>AN19 Intégrale de FRESNEL</p> <p>AN20 Calcul d'une intégrale (AN23 Méthode de LAPLACE)</p>
<p>234 Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.</p>	<p>AN03 L'espace $H^1(I)$ (AN04 Théorème de SHANNON)</p> <p>AN06 Densité des polynômes orthogonaux</p> <p>AN21 Fonctions lipschitziennes</p> <p>AN24 Sous-espaces fermés de L^p</p>
	<p>AN05 Formule de POISSON et application</p>

235 Interversión d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications. 7

	(AN11 Théorème de GERSHGÖRIN) (AN16 Suites équiréparties modulo 1) AN19 Intégrale de FRESNEL (AN21 Fonctions lipschitziennes) (AN23 Méthode de LAPLACE)
236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.	(AN14 Méthode de quadrature de GAUSS) AN19 Intégrale de FRESNEL AN20 Calcul d'une intégrale (AN23 Méthode de LAPLACE)
237 Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de \mathbb{R} .	AN05 Formule de POISSON et application AN14 Méthode de quadrature de GAUSS AN19 Intégrale de FRESNEL (AN20 Calcul d'une intégrale) AN23 Méthode de LAPLACE
238 Méthodes de calcul approché d'intégrales.	AN14 Méthode de quadrature de GAUSS (AN16 Suites équiréparties modulo 1)
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	AN04 Théorème de SHANNON AN06 Densité des polynômes orthogonaux (AN11 Théorème de GERSHGÖRIN) AN19 Intégrale de FRESNEL AN20 Calcul d'une intégrale AN23 Méthode de LAPLACE
240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.	AN04 Théorème de SHANNON AN06 Densité des polynômes orthogonaux AN19 Intégrale de FRESNEL
241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.	AN05 Formule de POISSON et application
242 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.	AN02 Dénombrement des partitions d'un ensemble fini AN05 Formule de POISSON et application
243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.	AN02 Dénombrement des partitions d'un ensemble fini
244 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.	(AN02 Dénombrement des partitions d'un ensemble fini) (AN04 Théorème de SHANNON) (AN06 Densité des polynômes orthogonaux)

	(AN11 Théorème de GERSHGÖRIN) (AN12 Théorème de JORDAN)
245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbb{C} .	(AN06 Densité des polynômes orthogonaux) AN11 Théorème de GERSHGÖRIN AN12 Théorème de JORDAN
246 Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.	((AN04 Théorème de SHANNON)) AN05 Formule de POISSON et application
247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.	AN02 Dénombrement des partitions d'un ensemble fini AN05 Formule de POISSON et application (AN11 Théorème de GERSHGÖRIN) (AN16 Suites équiréparties modulo 1) AN19 Intégrale de FRESNEL (AN23 Méthode de LAPLACE)
248 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples.	AN06 Densité des polynômes orthogonaux (AN10 Théorème de BROUWER) AN14 Méthode de quadrature de GAUSS
249 Le jeu de pile ou face (suites de variables de Bernoulli indépendantes).	
250 Loi binômiale, loi de Poisson. Applications.	
251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.	
252 Parties convexes, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables). Applications.	AL02 Sous-groupes compacts du groupe linéaire AN17 Méthode de NEWTON AL26 Continuité des fonctions convexes
253 Variables gaussiennes. Applications.	

1 Sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translations

THÉORÈME. Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n . Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'endomorphisme τ_a de E par $\tau_a f(x) = f(x - a)$. Alors F est stable par tous les endomorphismes τ_a ($a \in \mathbb{R}$) si et seulement si F est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants.

Preuve.

Si F est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants, alors F est un sous-espace vectoriel de E de dimension n d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire. De plus, il est clair qu'un tel sous-espace est stable par translations.

Réciproquement, supposons que F soit stable par translations. Soit (f_1, \dots, f_n) une base de F . Soient $a \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\tau_{-a} f_i \in F$ donc il existe des scalaires $\lambda_{i1}(a), \dots, \lambda_{in}(a)$ tels que $f_i(x+a) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}(a) f_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (*). Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $F_k(x) = \int_0^x f_k(t) dt$. En intégrant la relation précédente, on a $\int_0^x f_i(t+a) dt = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}(a) F_k(x)$, soit encore après un changement de variable évident $F_i(x+a) - F_i(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}(a) F_k(x)$.

Les f_i étant linéairement indépendantes, les F_i le sont aussi (sinon on obtiendrait par dérivation une relation entre les f_i). Il existe donc des réels x_1, \dots, x_n tels que la matrice $A = (F_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ soit inversible, c'est l'objet du lemme que nous reportons à la fin de la démonstration. La relation $\forall i, j \quad F_i(x_j + a) - F_i(x_j) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}(a) F_k(x_j)$ s'écrit encore $B(a) = \Lambda(a)A$, où on a noté $B(a) = (F_i(x_j + a) - F_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\Lambda(a) = (\lambda_{ij}(a))_{1 \leq i, j \leq n}$.

On en déduit que $\Lambda(a) = B(a)A^{-1}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Les f_i étant continues, les F_i sont de classe \mathcal{C}^1 et donc aussi l'application $a \mapsto B(a)$. On en déduit que $a \mapsto \Lambda(a)$ est de classe \mathcal{C}^1 , autrement dit les λ_{ij} sont de classe \mathcal{C}^1 . En prenant $x = 0$ dans (*), on voit que $f_i(a) = \sum_{k=1}^n f_k(0) \lambda_{ik}(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, ce qui montre que f_i est de classe \mathcal{C}^1 . Par une récurrence immédiate, les f_i sont en fait de classe \mathcal{C}^∞ : on a $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

En dérivant la relation (*) par rapport à a en 0, on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_i(x) = \sum_{k=1}^n \lambda'_{ik}(0) f_k(x)$, on en déduit que $f'_i \in F$, autrement dit $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est stable par l'endomorphisme D de dérivation. Soit μ le polynôme minimal de $D|_F$, on note d son degré. On a $F \subset \text{Ker} \mu(D)$, mais d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire, $\text{Ker} \mu(D)$ est un sous-espace de E de dimension d , on doit donc avoir $d = n$ et $F = \text{Ker} \mu(D)$.

Enfin, démontrons le lemme annoncé : soient h_1, \dots, h_n des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} linéairement indépendantes. On note $K = \text{Vect}(h_1, \dots, h_n)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note δ_x la forme linéaire $f \mapsto f(x)$. Soit $\Gamma = \{\delta_x, x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \text{Vect}_{K^*}(\Gamma)$. On a ${}^{\perp K} G = {}^{\perp K} \Gamma = 0$, ce qui prouve que $G = K^* : \Gamma$ engendre K^* . Il existe donc des réels x_1, \dots, x_n tels que $(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$ soit une

base de K^* . La matrice $(h_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de passage de la base duale des h_i à la base des δ_{x_i} , d'où le résultat. \square

Leçons possibles

120 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie).
Rang. Exemples et applications

(**123** Déterminant. Exemples et applications.)

132 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

211 Utilisation de la dimension finie en analyse.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires.
Exemples et applications.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

Références

?

2 Dénombrement des partitions de $\{1, \dots, n\}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$, avec par convention $D_0 = 1$.

Une relation de récurrence

Pour obtenir une partition de $\{1, \dots, n+1\}$, on peut commencer par choisir une partie contenant 1, qui a un certain nombre $k+1$ d'éléments (où $0 \leq k \leq n$), ce qui revient à choisir k éléments parmi $\{2, \dots, n+1\}$; puis choisir une partition des $n-k$ éléments restants.

On en déduit que $D_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k}$, après une réindexation :

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k.$$

Une expression analytique de D_n

On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} z^n$. Son rayon de convergence est ≥ 1 , car on montre par récurrence que $D_n \leq n!$:

- on a bien $D_0 = 1 \leq 0! = 1$,
- si $D_k \leq k!$ pour tout $0 \leq k \leq n$, on a par la relation de récurrence plus haut

$$D_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ d'où } D_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n n! = (n+1)!.$$

Il existe donc une fonction $z \mapsto f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} z^n$ holomorphe sur le disque unité ouvert de \mathbb{C} , que l'on note D .

Pour $z \in D$, on a $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_{n+1}}{n!} z^n$, et en utilisant la relation de récurrence du paragraphe précédent $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$, soit encore

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^n}{(n-k)! k!} \frac{D_k}{k!}.$$

On reconnaît le produit de CAUCHY des deux séries $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ et $f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{D_k}{k!} z^k$.

Ces deux séries ayant un rayon de convergence ≥ 1 , leur produit est bien défini dans D par la formule précédente, si bien que l'on a l'identité $f'(z) = e^z f(z)$ dans D .

On en déduit que la fonction holomorphe $z \mapsto e^{-e^z} f(z)$ est de dérivée nulle dans D , elle est donc constante égale à sa valeur en 0 qui est e^{-1} . On obtient donc la formule $\forall z \in D \quad f(z) = e^{e^z - 1}$.

On développe une telle expression : $f(z) = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{e^{kz}}{k!} = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(kz)^n}{k! n!}$.

On peut intervertir deux sommes absolument convergentes, d'où l'égalité

$$f(z) = e^{-1} \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{z^n}{n!}.$$

Par identification des coefficients, on obtient finalement $D_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Leçons possibles

145 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

231 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.

242 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

244 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

Références

?

3 L'espace $H^1(I)$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert borné non vide de \mathbb{R} . On note $\mathcal{D}(I)$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur I et à support compact dans I .

Si $u \in L^2(I)$, nous conviendrons de dire que u est faiblement dérivable s'il existe une fonction $v \in L^2(I)$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\int_I v\varphi = -\int_I u\varphi'$ (autrement dit v est la dérivée de u au sens des distributions). Lorsqu'une telle fonction v existe, on admettra qu'elle est unique ; nous l'appellerons dérivée faible de u et on notera $v = u'$.

Ceci étant, on note $H^1(I)$ l'espace des fonctions de $L^2(I)$ faiblement dérivables au sens précédent.

THÉORÈME. *L'espace $H^1(I)$ jouit des propriétés suivantes :*

- i) Muni de la norme définie par $\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2}$, $H^1(I)$ est un espace de HILBERT.*
- ii) $H^1(I)$ s'injecte canoniquement dans $\mathcal{C}(\bar{I})$ et dans $L^2(I)$, et ces injections (dites de SOBOLEV) sont compactes.*

Preuve.

$H^1(I)$ muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_I uv + \int_I u'v'$ est un espace préhilbertien. Montrons que c'est un espace complet : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de CAUCHY dans $H^1(I)$. Alors les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de CAUCHY dans $L^2(I)$, elles ont donc des limites respectives u et v dans $L^2(I)$ (car $L^2(I)$ est un espace complet). De plus, on a $v = u'$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a $\int_I v\varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I u'_n\varphi$ (grâce à l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), soit $\int_I v\varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\int_I u_n\varphi'$, d'où $\int_I v\varphi = -\int_I u\varphi'$ (pour la même raison). u est donc élément de $H^1(I)$, et on a immédiatement $u \stackrel{H^1(I)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Ceci prouve le point *i*).

Pour le point *ii*), on commence par montrer que tout élément de $H^1(I)$ a un représentant dans $\mathcal{C}(\bar{I})$. Soit $u \in H^1(I)$, on pose $\tilde{u}(x) = \int_a^x u'(t)dt$. I étant borné, on a $u' \in L^1(I)$, donc \tilde{u} est bien défini et c'est une fonction continue sur $[a, b]$. De plus, on vérifie que $\tilde{u} \in H^1(I)$ et $\tilde{u}' = u'$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\int_a^b u'(t)\varphi(t)dt = \int_a^b \int_a^t u'(t)\varphi'(x)dxdt$. Le théorème de FUBINI s'applique sans problème, si bien qu'on peut écrire $\int_a^b u'(t)\varphi(t)dt = \int_a^b \int_x^b u'(t)\varphi'(x)dtdx$, soit encore $\int_a^b u'(t)\varphi(t)dt = \int_a^b (\tilde{u}(b) - \tilde{u}(x))\varphi'(x)dx$ d'où on tire $\int_a^b u'(t)\varphi(t)dt = -\int_a^b \tilde{u}(x)\varphi'(x)dx$ (car φ est à support compact), ce qu'il fallait. u et \tilde{u} ont même dérivée faible, il s'ensuit qu'il existe une constante C telle que $u \stackrel{p.p.}{=} \tilde{u} + C$ (nous admettrons ce point). Nous avons bien montré que u a un représentant continu sur \bar{I} , nous choisirons désormais toujours un tel représentant. On pourra noter que l'on a montré au passage que $u(x) - u(y) = \int_x^y u'(t)dt$ pour tout $x, y \in I$.

Montrons maintenant que l'injection que nous venons de décrire de $H^1(I)$ dans $\mathcal{C}(\bar{I})$ est compacte : soit $B = \{u \in H^1(I), \|u\|_{H^1} \leq 1\}$. Il s'agit de montrer que B est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\bar{I})$. On utilise le théorème d'ASCOLI :

- B est ponctuellement bornée : fixons $x \in [a, b]$, alors $\forall u \in B$, on écrit que
$$u(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) dy, \quad \text{soit} \quad u(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_y^x u'(t) dt - u(y) \right) dy,$$
 soit encore
$$u(x) = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b \int_y^x u'(t) dt dy - \int_a^b u(y) dy \right).$$
 On en déduit que $|u(x)| \leq \|u'\|_2 + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \|u\|_2$, et finalement $|u(x)| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{b-a}}$.
- B est équicontinue : cela découle immédiatement du fait que $\forall x, y \in [a, b], \forall u \in B$,
$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t) dt, \quad \text{d'où} \quad |u(x) - u(y)| \leq \sqrt{|x-y|}.$$

Ceci prouve que B est une partie relativement compacte de $\mathcal{C}(\bar{I})$, et donc que l'injection $\text{H}^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{I})$ est compacte (en particulier elle est continue). Il s'ensuit immédiatement que l'injection $\text{H}^1(I) \hookrightarrow \text{L}^2(I)$ est également continue et compacte, puisque la topologie L^2 est moins fine que celle de la convergence uniforme. □

Proposition. Soit $\text{H}_0^1(I)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(I)$ dans $\text{H}^1(I)$. On a les propriétés suivantes :

- i) $\text{H}_0^1(I) = \{u \in \text{H}^1(I), u(a) = u(b) = 0\}$.
- ii) $\text{H}^1(I) = \text{H}_0^1(I) \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
- iii) $\mathcal{D}(\bar{I})$ est dense dans $\text{H}^1(I)$.

Preuve.

Si u est limite dans $\text{H}^1(I)$ de fonctions de $\mathcal{D}(I)$, alors u est limite dans $\mathcal{C}(\bar{I})$ des mêmes fonctions (grâce au théorème précédent), on en déduit que $u(a) = u(b) = 0$.

Réciproquement, soit $u \in \text{H}^1(I)$ tel que $u(a) = u(b) = 0$. Par densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $\text{L}^2(I)$ (ce qu'on suppose connu), il existe une suite de fonctions $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(I)$ telle que $\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u'$ dans $\text{L}^2(I)$. Soit $\theta \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \theta = 1$ et posons $\varphi_n = \psi_n - (\int_I \psi_n) \theta$. Alors $\varphi_n \in \mathcal{D}(I)$, $\int_I \varphi_n = 0$ et on a toujours $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u'$. Pour le voir, on écrit que $\forall x \in I, |\varphi_n(x) - u'(x)| \leq |\psi_n(x) - u'(x)| + |\int_I \psi_n| |\theta(x)|$, il s'ensuit que $\|\varphi_n - u'\|_2 \leq \|\psi_n - u'\|_2 + |\int_I \psi_n| \|\theta\|_2$. Or $\|\psi_n - u'\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par hypothèse et $\int_I \psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I u'$ (puisque $\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u'$ dans $\text{L}^2(I)$), avec $\int_I u' = u(b) - u(a) = 0$. On a donc bien $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u'$. Enfin, on pose $\xi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t) dt$. Comme $\varphi_n \in \mathcal{D}(I)$ et $\int_I \varphi_n = 0$, on a $\xi_n \in \mathcal{D}(I)$. De plus, $\|\xi_n - u\|_{\text{H}^1} = \|\xi_n - u\|_2 + \|\varphi_n - u'\|_2$. Comme $u(a) = 0$, on a $u(x) = \int_a^x u'(t) dt$, si bien que $\xi_n(x) - u(x) = \int_a^x (\varphi_n(t) - u'(t)) dt$, on en déduit que $\|\xi_n - u\|_2 \leq (b-a) \|\varphi_n - u'\|_2$. Finalement, $\|\xi_n - u\|_{\text{H}^1} \leq (b-a+1) \|\varphi_n - u'\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et le point i) est montré.

Le point ii) se déduit sans problème du point i) (je laisse la preuve). Enfin, le point iii) est une conséquence immédiate de ii). □

Proposition. Soient u et v des éléments de $\text{H}^1(I)$, alors $uv \in \text{H}^1(I)$ (autrement dit $\text{H}^1(I)$ est stable par multiplication). De plus, on a la formule $(uv)' = u'v + uv'$. La formule d'intégration par parties usuelle (dans $\mathcal{C}^1(I)$) est donc vraie dans $\text{H}^1(I)$.

Preuve.

Soient $u_n \in \mathcal{D}(\bar{I}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$ et $v_n \in \mathcal{D}(\bar{I}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v$ dans $H^1(I)$. Alors $u_n v_n \in \mathcal{D}(\bar{I}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} uv$ dans $\mathcal{C}(\bar{I})$, et donc dans $L^2(I)$. De plus, $(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \in \mathcal{D}(\bar{I}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u'v + uv'$ dans $L^2(I)$, par continuité de la multiplication de $\mathcal{C}(\bar{I}) \times L^2(I)$ dans $L^2(I)$. On en déduit que les suites $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((u_n v_n)')_{n \in \mathbb{N}}$ sont de CAUCHY dans $L^2(I)$, donc que $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de CAUCHY dans $H^1(I)$. La suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a donc une limite dans $H^1(I)$. Cette limite ne peut être que uv , puisque $u_n v_n \in \mathcal{D}(\bar{I}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} uv$ dans $L^2(I)$ (et la topologie de $H^1(I)$ est plus fine que celle de $L^2(I)$). De même, on a nécessairement $(uv)' = u'v + uv'$ (puisque, par exemple, la dérivation est continue de $H^1(I)$ dans $L^2(I)$).

La formule d'intégration par parties s'en ensuit directement (rappelons $u \in H^1(\bar{I})$, qu'on prend toujours continu, vérifie $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t) dt$).

□

Voyons maintenant une application au « problème de DIRICHLET pour le Laplacien » :

Proposition.

Étant donnée une fonction f continue sur \bar{I} , il existe une unique fonction u de classe

$$(au moins) \mathcal{C}^2 \text{ sur } \bar{I} \text{ telle que } \begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} .$$

Preuve.

Supposons que u soit solution du problème. Alors pour toute fonction $v \in H_0^1(I)$, on a $-\int_I u'' v + \int_I uv = \int_I fv$. En utilisant la formule d'intégration par parties démontrée plus haut, cela se réécrit $\int_I u' v' + \int_I uv = \int_I fv$ (sachant que $v(a) = v(b) = 0$). En notant L la forme linéaire continue sur $H_0^1(I)$ définie par $v \mapsto \int_I fv$, on a donc $\langle u, v \rangle_{H^1} = L(v)$ pour tout $v \in H_0^1(I)$. Or $H_0^1(I)$ est un sous-espace fermé de $H^1(I)$, c'est donc un espace de HILBERT, et le théorème de représentation de RIESZ nous dit qu'il existe un unique u dans $H_0^1(I)$ vérifiant la propriété précédente.

On a donc montré l'unicité d'une solution au problème; réciproquement, montrons que la solution « faible » donnée par le théorème de RIESZ est une solution. Le fait que $-\int_I u'' v = -\int_I uv + \int_I fv$ en particulier pour tout $v \in \mathcal{D}(I)$ montre que u est deux fois faiblement dérivable et $u'' = u + f$ (dans $L^2(I)$). Or u et f étant continues, cette égalité montre que u' est de classe \mathcal{C}^1 sur \bar{I} (car $u'(x) = u'(a) + \int_a^x u''(t) dt$) et par suite que u est de classe \mathcal{C}^2 sur \bar{I} . u'' est donc la dérivée seconde usuelle de u , et u est solution forte du problème.

□

Leçons possibles

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

207 Prolongement de fonctions. Applications.

((**208** Utilisation de la continuité uniforme en analyse.))

(**210** Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.)

212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

234 Espaces L^p .

Références

?

4 Théorème d'échantillonnage de SHANNON

On note BL^2 le sous-espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de FOURIER est nulle (presque partout) en dehors de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.

THÉORÈME. *L'espace BL^2 jouit des propriétés suivantes :*

- i) C'est un espace de HILBERT.*
- ii) Tout fonction de BL^2 admet un représentant continu borné qui est même analytique.*
- iii) On a l'identité $u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) \text{sinc}(\cdot - n)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (et même dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$).*

iv) L'application $u \mapsto (u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie de BL^2 sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Preuve.

Pour voir que BL^2 est un espace de HILBERT, il suffit de montrer que c'est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$. Soit donc $u_p \in BL^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} u$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Par continuité de la transformée de FOURIER sur $L^2(\mathbb{R})$, on a $\|\hat{u}_p - \hat{u}\|_2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$. En particulier, $\|\hat{u}_p - \hat{u}\|_{2, \mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, ce qui s'écrit encore $\|\hat{u}\|_{2, \mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]} = 0$. On en déduit que \hat{u} est presque partout nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, d'où $u \in BL^2$, et le point *i* est montré. On pouvait aussi remarquer que BL^2 est isométriquement isomorphe à $L^2([-1/2, 1/2])$ par la transformation de FOURIER.

Pour montrer le point *ii*), on introduit la transformée de LAPLACE de \hat{u} . \hat{u} est élément de $L^1(\mathbb{R})$ en vertu de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ($[-1/2, 1/2]$ étant de mesure finie), F est donc bien définie sur \mathbb{C} par $F(z) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi\xi z} \hat{u}(\xi) d\xi$ (la transformée de LAPLACE usuelle de \hat{u} serait en fait $z \mapsto F(iz/2\pi)$). Comme \hat{u} est élément de $L^1(\mathbb{R})$, la formule d'inversion de FOURIER permet d'affirmer que $u(x) = F(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrons que F est holomorphe sur \mathbb{C} :

- Pour tout $\xi \in [-1/2, 1/2]$, $z \mapsto e^{2i\pi\xi z} \hat{u}(\xi)$ est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} ,
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq K$ (où K est un réel > 0 fixé), $\xi \in [-1/2, 1/2] \mapsto e^{2i\pi\xi z} \hat{u}(\xi)$ est une fonction mesurable et de module majoré par $e^{\pi K} \hat{u}(\xi)$, qui est une fonction intégrable de ξ sur $[-1/2, 1/2]$.

Il s'ensuit que F est holomorphe sur \mathbb{C} d'après le théorème d'holomorphicité relatif aux intégrales à paramètre, de plus on a $F^{(k)}(z) = (2i\pi)^k \int_{-1/2}^{1/2} \xi^k e^{2i\pi\xi z} \hat{u}(\xi) d\xi$ pour tout entier k .

On voit en particulier que $|F^{(k)}(z)| \leq \pi^k e^{\pi|\text{Im}(z)|} \|\hat{u}\|_2$ soit encore $|F^{(k)}(z)| \leq \pi^k e^{\pi|\text{Im}(z)|} \|u\|_2$ (puisque la transformation de FOURIER est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$).

On en déduit que u a un représentant continu qui est même analytique (à savoir $x \mapsto F(x)$, on prendra désormais toujours un tel représentant), de plus on a $\|u^{(k)}\|_\infty \leq \pi^k \|u\|_2$ pour tout entier k . On a donc montré le point *ii*), et plus précisément que la topologie de BL^2 est plus fine que celle de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, et même que celle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Pour montrer le point *iii*), on commence par remarquer que BL^2 est isométriquement isomorphe à $L^2([-1/2, 1/2])$ (par la transformation de FOURIER). La famille des $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $e_n(\xi) = e^{2i\pi n\xi}$ étant une base hilbertienne de $L^2([-1/2, 1/2])$, la famille des $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $\varepsilon_n = \bar{\mathcal{F}}(e_n)$ est donc une base hilbertienne de BL^2 . Pour $u \in BL^2$, on a donc l'égalité $u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle u, \varepsilon_n \rangle \varepsilon_n$, mais la convergence a aussi lieu dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (et même dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) puisque nous avons vu que la topologie L^2 est plus fine que celle de la convergence uniforme dans BL^2 .

On écrit que $\varepsilon_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi\xi x} e_n(\xi) d\xi$ soit encore $\varepsilon_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi\xi(x+n)} d\xi$, d'où $\varepsilon_n(x) = \left[\frac{e^{2i\pi\xi(x+n)}}{2i\pi\xi(x+n)} \right]_{\xi=-1/2}^{1/2}$. On a finalement $\varepsilon_n(x) = \text{sinc}(x+n)$, où la fonction sinc est définie sur \mathbb{R} (prolongée par continuité en 0) par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}$.

L'identité précédente s'écrit alors $u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle u, \text{sinc}(\cdot + n) \rangle \text{sinc}(\cdot + n)$, comme elle a lieu entre autres dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ on a en particulier $u(-n) = \langle u, \text{sinc}(\cdot + n) \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela nous permet de réécrire $u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(-n) \text{sinc}(\cdot + n)$, ou encore $u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) \text{sinc}(\cdot - n)$, et le point *iii*) est montré.

Enfin, la théorie des espaces de HILBERT nous dit que $u \mapsto (\langle u, \varepsilon_n \rangle)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie de BL^2 sur $l^2(\mathbb{Z})$; le point *iv*) s'en ensuit immédiatement. □

Leçons possibles

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

(**205** Espaces complets. Exemples et applications.)

(**207** Prolongement de fonctions. Applications.)

210 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

213 Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

(**228** Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.)

(**234** Espaces L^p .)

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

(**244** Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.)

((**246** Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.))

Références
willem ?

5 Formule de POISSON et application

THÉORÈME (Formule sommatoire de POISSON). Soit $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifiant :

i) $\exists \alpha > 1$, $|F(x)| \leq |x|^{-\alpha}$ pour $|x|$ voisin de $+\infty$,

ii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < +\infty$.

On a alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n)$.

On a noté $\hat{F} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \xi} F(x) dx$ la transformée de FOURIER de F (bien définie car $F \in L^1(\mathbb{R})$ en vertu de i).

Preuve.

Soit $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(x+n)$. f est bien définie et continue sur \mathbb{R} car la série (à double sens) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(x+n)$ converge normalement sur les compacts. En effet, si $K > 0$, alors pour $x \in [-K, K]$ on a $|x+n| \geq |n|/2$ dès que $|n| \geq 2K$, de sorte que pour $|n|$ assez grand $|F(x+n)| \leq (|n|/2)^{-\alpha}$, qui est le terme général d'une série normalement convergente (car $\alpha > 1$).

De plus, on voit par une réindexation évidente que f est 1-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER : pour $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_m(f) &= \int_0^1 e^{-2i\pi m t} f(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi m t} F(t+n) dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-2i\pi m t} F(t+n) dt \end{aligned}$$

L'interversion est autorisée puisque la somme converge normalement sur les compacts (et l'intervalle d'intégration est de mesure finie). On écrit encore

$$\begin{aligned} c_m(f) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} e^{-2i\pi m u} F(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi m u} F(u) du \end{aligned}$$

Le « recollement » étant autorisé car $u \mapsto e^{-2i\pi u} F(u)$ est intégrable sur \mathbb{R} . On a donc finalement $c_m(f) = \hat{F}(m)$.

Comme f est continue et $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)| < +\infty$, la série de FOURIER de f converge normalement vers f . En particulier, on a $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi n x}$ pour tout réel x , soit encore $\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n) e^{2i\pi n x}$. On obtient la formule de POISSON en prenant $x = 0$. \square

Comme application, on propose de donner un équivalent au voisinage de 1 de la fonction thêta d'AIRY :

On considère la série $\Theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n^2}$. Il s'agit d'une série entière puisque

$\Theta(z) = 2 \sum_{n \geq 0} z^{n^2} - 1$. Son rayon de convergence est 1, car pour $0 \leq r < 1$, on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{n^2} < \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^n < +\infty$, et la série diverge en $r = 1$.

Soit $\omega > 0$ et posons $F(x) = e^{-\omega x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. F est continue sur \mathbb{R} et vérifie l'hypothèse *i*) du théorème. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $\hat{F}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi n x} e^{-\omega x^2} dx$, soit encore

$\hat{F}(n) = e^{-\pi^2 n^2 / \omega} \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega(x+i\pi n/\omega)^2} dx$. J'explique rapidement une manière de calculer

cette intégrale. On écrit que l'intégrale de la fonction holomorphe $z \mapsto e^{-\omega z^2}$ sur un rectangle « posé » sur l'axe des réels et de « hauteur » $\pi n/\omega$ est nulle. On montre sans difficulté que les termes de bord tendent vers 0 quand la longueur du rectangle

tend vers $+\infty$. On en déduit que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\omega(x+i\pi n/\omega)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}$. Finalement,

$$\hat{F}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\pi^2 n^2 / \omega}.$$

L'hypothèse *ii*) du théorème est donc vérifiée, et la formule de POISSON nous dit que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\omega n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2 / \omega}.$$

Cette identité se réécrit $\Theta(e^{-\omega}) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \Theta(e^{-\pi^2/\omega})$, soit encore $\sqrt{\pi} \Theta(e^{-\pi^2 u}) = \frac{\Theta(e^{-1/u})}{\sqrt{u}}$

(pour tout $u > 0$). On en déduit que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\Theta(e^{-1/u})}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi}$, soit encore

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{-\log x} \Theta(x) = \sqrt{\pi}$. Il s'ensuit que $\Theta(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{-\frac{\pi}{\log x}}$, finalement

$$\Theta(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

Leçons possibles

227 Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

235 Intersion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.

- 237** Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de \mathbb{R} .
240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.
241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
242 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.
246 Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.

Références

[QZ02] pp.93-94.

[Gou94] pp.269-270.

6 Densité des polynômes orthogonaux

Quelques définitions et rappels.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On appelle poids toute fonction $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, partout > 0 et « à décroissance rapide » dans le sens suivant : $\int_I |x|^n \omega(x) dx < +\infty$ pour tout entier n (autrement dit les polynômes sont intégrables pour la mesure $\omega d\lambda$). En particulier, si I est borné, toute fonction intégrable > 0 convient.

Par définition de la fonction poids, la mesure $\omega d\lambda$ sur I est finie. En particulier, on a $L^r(I, \omega d\lambda) \subset L^s(I, \omega d\lambda)$ dès que $r \geq s$.

$L^2(I, \omega d\lambda)$ est un espace de HILBERT pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_\omega = \int_I f(x)g(x)\omega(x)dx$. Le k -ème polynôme orthogonal associé à ω est le polynôme de norme 1 qui dirige la droite vectorielle orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$. On montre que la famille des polynômes orthogonaux s'obtient également en appliquant le procédé de GRAM-SCHMIDT sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Bref, une telle famille orthonormale de polynômes échelonnés existe et est unique, de plus c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

THÉORÈME. *Si ω est « à décroissance exponentielle » dans le sens suivant : $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|}\omega(x)dx < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ω forment une base hilbertienne de $L^2(I, \omega d\lambda)$.*

Preuve.

Nous avons déjà vu que la famille des polynômes orthogonaux associés à ω est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$. Qu'elle soit une base hilbertienne de $L^2(I, \omega d\lambda)$ revient donc à dire que les polynômes sont denses de $L^2(I, \omega d\lambda)$. Nous allons montrer que $\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$, ce qui répondra à la question.

Soit donc $f \in L^2(I, \omega d\lambda)$ telle que $\int_I x^n f(x)\omega(x)dx = 0$ pour tout entier n . Il s'agit de montrer que $f \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0$.

Soit g la fonction définie (presque partout) sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x)\omega(x)\mathbf{1}_I(x)$. Alors $g \in L^1(\mathbb{R})$ (car $f \in L^1(I, \omega d\lambda)$), on peut donc considérer sa transformée de FOURIER $\hat{g} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)g(x)\omega(x)dx$. Nous allons montrer que g se prolonge en une fonction holomorphe sur $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |\text{Im}z| < \alpha/2\}$.

Pour cela, on introduit la fonction F définie par $F(z) = \int_I h(z, x)dx$, où on a noté $h(z, x) = e^{-izx} f(x)\omega(x)$ (à peu de choses près, il s'agit de la transformée de LAPLACE de g).

Montrons que F est bien définie et holomorphe sur B_α :

– Pour tout $x \in I$, $z \mapsto h(z, x)$ est holomorphe sur B_α .

- Pour tout $z \in B_\alpha$, la fonction $x \mapsto h(z, x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables.
- Pour tout $z \in B_\alpha$, la fonction $x \mapsto h(z, x)$ est majorée en module par $x \mapsto e^{|\alpha|x/2}|f(x)|\omega(x)$, qui est une fonction intégrable sur I (et indépendante de z). En effet, $x \mapsto e^{|\alpha|x/2}$ et f sont des fonctions de $L^2(I, \omega d\lambda)$ par hypothèse, leur produit est donc dans $L^1(I, \omega d\lambda)$.

D'après le théorème d'holomorphicité relatif aux intégrales à paramètre, la fonction F est bien définie et holomorphe sur B_α .

De plus, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n h(z, x)}{\partial z^n} dx$ soit $F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x) \omega(x) dx$. En particulier (en utilisant l'hypothèse sur f), on a $F^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que F est nulle sur un voisinage de 0, puis que F est nulle sur tout B_α par principe de prolongement analytique. En particulier, sa restriction \hat{g} à l'axe des réels est identiquement nulle.

Par injectivité de la transformée de FOURIER sur $L^1(\mathbb{R})$, on en déduit que $g \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0$ sur \mathbb{R} , puis que $f \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0$ sur I (car ω reste > 0 sur I).

□

L'hypothèse « à décroissance rapide » ne suffit pas comme le montre l'exemple suivant :

On pose $I =]0, +\infty[$ et $\omega(x) = x^{-\log(x)}$ pour $x \in I$. w est bien un poids sur I . Nous allons montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(2\pi \log(x))$ n'est pas limite de polynômes dans $L^2(I, \omega d\lambda)$: f n'est pas la fonction nulle (presque partout), or pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\langle X^n, f \rangle_\omega = 0$. Vérifions-le :

Par le changement de variable $y = \log(x)$ (qui est un difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R}), on a $\langle X^n, f \rangle_\omega = \int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi \log(x)) \omega(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2} dy$, soit $\langle X^n, f \rangle_\omega = e^{(n+1)^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y - \frac{n+1}{2})^2} \sin(2\pi y) dy$, puis par le changement de variable affine $u = y - \frac{n+1}{2}$, il vient $\langle X^n, f \rangle_\omega = (-1)^{n+1} e^{(n+1)^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin(2\pi u) du$. L'intégrande étant une fonction impaire, on a effectivement $\langle X^n, f \rangle_\omega = 0$.

Leçons possibles

(201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.)

202 Exemples de parties denses et applications. (205 Espaces complets. Exemples et applications.)

(209 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.)

212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

213 Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

234 Espaces L^p

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

(**244** Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.)

(**245** Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbb{C} .)

248 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiale ou polynômiales par morceaux. Exemples.

Références

[BMP05]

7 Théorème de CARTAN-VON NEUMANN

THÉORÈME (CARTAN-VON NEUMANN). *Tout sous-groupe fermé G de $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie.*

Preuve.

Il s'agit de montrer que G est localement \mathcal{C}^∞ -difféomorphe à un espace euclidien. Plus précisément, il faut montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout point $g \in G$, il existe un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un voisinage ouvert V de g dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tel que $\varphi(U \cap F) = V \cap G$.

Étape 1 : Il suffit de montrer cette propriété au voisinage de $\text{id}_G (= I_n)$.

Cela découle directement du fait que pour chaque $g \in G$, l'application $M \mapsto gM$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui envoie un voisinage de I_n dans G sur un voisinage de g dans G .

Étape 2 : Définition de « F ».

On pose $\mathcal{L} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R} e^{tM} \in G\}$. Il nous faut montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est clair que $0 \in \mathcal{L}$ et que \mathcal{L} est stable par multiplication scalaire, il reste à voir que \mathcal{L} est stable par addition.

On commence par montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $e^{A+B} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (e^{A/k} e^{B/k})^k$. Comme on le voit sur le développement en série de \exp , on a $e^H = I_n + H + o(H)$, de sorte que $\exp'(0) = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. D'après le théorème d'inversion locale, \exp induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 sur un voisinage ouvert de I_n (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Notons L sa réciproque, on a $L(I_n + H) = H + o(H)$.

On écrit ensuite que pour k assez grand,

$$\left(e^{A/k} e^{B/k}\right)^k = \exp[L(e^{A/k} e^{B/k})]^k = \exp\left[kL\left(I_n + \frac{A+B}{k} + o(1/k)\right)\right]$$

On en déduit que $\left(e^{A/k} e^{B/k}\right)^k = \exp[A + B + o(1)]$, d'où le résultat.

Si maintenant A et B sont éléments de \mathcal{L} , on écrit que $e^{t(A+B)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (e^{t/kA} e^{t/kB})^k$. Par hypothèse, $e^{t/kA}$ et $e^{t/kB}$ sont éléments de G (pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), et comme G est un sous-groupe fermé, on a $e^{t(A+B)} \in G$ par passage à la limite. Ceci prouve que $A + B \in \mathcal{L}$, finalement \mathcal{L} est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Étape 3 : Définition de « φ ».

Soit N un supplémentaire de \mathcal{L} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus N \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(L, M) = e^L e^M$. φ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , de plus $\varphi(0) = I_n$ et $\varphi'(0) = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$,

φ induit donc un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme d'un voisinage U de 0 sur un voisinage V de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, il est clair que $\varphi(U \cap \mathcal{L}) \subset V \cap G$.

Il reste à montrer que si $\varphi(X) \in G$ avec $X = L + M \in U$, alors $X \in \mathcal{L}$. Nous allons voir juste après que quitte à restreindre U , $e^{U \cap N}$ ne rencontre G qu'en I_n . On écrit alors que $e^M = \varphi(X)e^{-L} \in G$, d'où on déduit que $M = 0$, *i.e.* $X \in \mathcal{L}$, et le théorème sera prouvé.

Enfin, on montre notre affirmation en suspens par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices non nulles de N telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = 0$ et $e^{M_k} \in G$ pour tout k . On pose $\varepsilon_k = M_k / \|M_k\|$, alors $\varepsilon_k \in S \cap N$ (où S est la sphère unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|$), donc par compacité on peut supposer que $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varepsilon \in S \cap N$ (quitte à extraire une sous-suite). Nous allons montrer que $\varepsilon \in \mathcal{L}$, ce qui constituera la contradiction puisque $\mathcal{L} \cap N = \{0\}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on écrit $t / \|M_k\| = n_k + \mu_k$ avec $n_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| \leq 1/2$. On a alors $e^{n_k M_k} = (e^{M_k})^{n_k} \in G$ et $e^{n_k M_k} = e^{t \varepsilon_k} e^{-\mu_k M_k}$, on en déduit que $e^{n_k M_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e^{t \varepsilon}$. Comme G est fermé, ceci prouve que $e^{t \varepsilon} \in G$, finalement $\varepsilon \in \mathcal{L}$.

□

On peut remarquer que \mathcal{L} est le plan tangent à G en I_n . En effet, si $X \in \mathcal{L}$, alors $t \mapsto e^{tX}$ est une courbe de G dont X est le vecteur tangent au point I_n . Ceci prouve que $\mathcal{L} \subset T_{I_n} G$, et on a en fait égalité pour des raisons de dimension.

Leçons possibles

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

127 Exponentielle de matrices. Applications.

214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.

Références

gonnord tosel, ?

8 Tipi de CANTOR

Le « tipi de CANTOR » (ou « éventail de KNASTER-KURATOWSKI ») est une partie \mathcal{T} de \mathbb{R}^2 définie comme suit :

On rappelle que l'espace triadique de CANTOR K_3 est obtenu en ôtant au segment $[0, 1]$ une réunion dénombrable d'intervalles ouverts I_n . C'est un espace compact et totalement discontinu. K_3 est réunion disjointe de $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \partial I_n$ (le « bord », dénombrable) et $\mathcal{G} = K_3 \setminus \mathcal{B}$ (le « gras »). \mathcal{B} et \mathcal{G} sont tous deux denses dans K_3 (et donc aussi tous deux d'intérieur vide) (*).

Soit s le point de coordonnées $(1/2, 1)$ dans \mathbb{R}^2 . Pour $c \in \mathcal{B}$, on appelle \mathcal{T}_c l'ensemble des points « rationnels » du segment $[s, c]$, c'est-à-dire d'ordonnées rationnelles ; et pour $c \in \mathcal{G}$ on prend pour \mathcal{T}_c l'ensemble des points « irrationnels » sur le segment $[s, c]$.

On pose alors $\mathcal{T} = \bigcup_{c \in K_3} \mathcal{T}_c$. On munit \mathcal{T} de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^2 .

s

Proposition. *L'espace \mathcal{T} est connexe. En revanche, $\mathcal{T} \setminus \{s\}$ est totalement discontinu.*

Preuve.

Commençons par la seconde affirmation. Soit $m \in \mathcal{T} \setminus \{s\}$, il s'agit de montrer que la composante connexe de m (dans $\mathcal{T} \setminus \{s\}$) est réduite au singleton $\{m\}$. Soit c le point de K_3

tel que $m \in \mathcal{T}_c$.

On montre d'abord que la composante connexe de m est contenue dans \mathcal{T}_c : soit $m' \in \mathcal{T} \setminus \{s\}$ tel que $m' \notin \mathcal{T}_c$. Soit $c' \in K_3$ tel que $m' \in \mathcal{T}_{c'}$. Il est clair qu'on peut trouver $\theta \in [c, c']$ tel que $\theta \notin K_3$. La droite de \mathbb{R}^2 passant par s et θ ne rencontre pas \mathcal{T} , donc elle sépare le plan en deux ouverts disjoints dont la réunion contient \mathcal{T} ; de plus ces deux ouverts contiennent respectivement m et m' . Ceci prouve que m et m' ne sont pas dans la même composante connexe de $\mathcal{T} \setminus \{s\}$.

Il s'ensuit que la composante connexe de m dans $\mathcal{T} \setminus \{s\}$ est la composante de m dans \mathcal{T}_c (pour la topologie trace). \mathcal{T}_c étant totalement discontinu (il est homéomorphe à un segment de \mathbb{Q} ou de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), la composante de m est réduite à $\{m\}$.

Montrons maintenant que \mathcal{T} est connexe. Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 tels que $\mathcal{T} \subset U \cup V$ et $\mathcal{T} \cap U \cap V = \emptyset$. On suppose par exemple que $s \in U$, il s'agit donc de montrer que $U \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}$.

On définit la « hauteur » d'un point $c \in K_3$ par $h(c) = \sup\{y_m, m \in \mathcal{T}_c \cap V\}$ (on pose $h(c) = 0$ si $\mathcal{T}_c \cap V = \emptyset$). Pour $q \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]$, notons $F_q = \overline{h^{-1}(\{q\})}$ l'adhérence de l'ensemble des points de hauteur q . Chaque F_q est d'intérieur vide dans K_3 car il ne rencontre pas \mathcal{B} . En effet, si $b \in \mathcal{B}$, le point du segment $[s, b]$ de hauteur q est dans \mathcal{T}_b , donc dans U ou bien dans V . Dans le premier cas, comme U est ouvert, les points suffisamment voisins de b ont une hauteur $< q$, donc b n'est pas limite de points de hauteur q . De même, dans le second cas les points suffisamment voisins de q ont une hauteur $> q$, et la même conclusion s'ensuit.

On remarque que si $g \in \mathcal{G}$, alors $h(g)$ est rationnel : sinon le point $m \in [s, g]$ d'ordonnée $h(g)$ serait dans \mathcal{T} , donc dans U ou bien dans V . Dans les deux cas, U et V étant des ouverts, on contredit la définition de $h(g)$. On a donc $\mathcal{G} = H \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]} F_q$, où H est l'ensemble des points de \mathcal{G} de hauteur nulle.

On peut alors écrire $K_3 = \left(\mathcal{B} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]} F_q \right) \sqcup H$. Or $\mathcal{B} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]} F_q$ est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide de K_3 (rappelons que \mathcal{B} est dénombrable), c'est donc une partie d'intérieur vide de K_3 (qui est un espace compact donc de BAIRE). On en déduit que H est dense dans \mathcal{T} . Il est alors clair que $\bigcup_{c \in H} \mathcal{T}_c$ est dense dans \mathcal{T} , en particulier U est dense dans \mathcal{T} (car $\bigcup_{c \in H} \mathcal{T}_c \subset U$, les éléments de H étant de hauteur nulle). Comme U est un ouvert, on a en fait $U \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}$, ce qu'il fallait. □

(*) On peut voir ceci de la manière suivante : les points de \mathcal{B} sont les nombres de K_3 dont le développement « propre » en base 3 est fini. Il est clair que ces nombres sont denses dans K_3 . Au passage, K_3 est lui formé des nombres dont le développement « impropre » en base 3 ne contient aucune occurrence du chiffre « 1 ».

Par ailleurs, de manière générale, si un espace topologique X est réunion disjointe de deux parties $X = A \sqcup B$, alors on se convainc sans mal que A est dense si et seulement si B est d'intérieur vide.

L'éventail de KNASTER-KURATOWSKI, en plus d'être une pathologie remarquable, fournit un exemple d'espace topologique qui est séparé (même métrique) et totalement discontinu mais loin d'être « 0-dimensionnel », ce qui signifie « ayant une base d'ouverts-fermés ». C'est immédiat : par exemple l'ouvert $\{m, y_m < 1/2\}$ de $\mathcal{T} \setminus \{s\}$ ne peut pas contenir d'ouvert-fermé, car ce serait un ouvert-fermé strict de \mathcal{T} (qui est connexe). Signalons qu'un espace 0-dimensionnel séparé est toujours totalement discontinu, ce qui est évident, la réciproque est vraie dans les espaces localement compacts (par exemple, l'espace de CANTOR est 0-dimensionnel).

Leçons possibles

((**203** Utilisation de la notion de compacité.))

204 Connexité. Exemples et applications.

((**205** Espaces complets. Exemples et applications.))

((**209** Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.))

Références

[Wil70]

9 Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS

THÉORÈME (D'ALEMBERT-GAUSS). *Tout polynôme non constant P à coefficients dans \mathbb{C} admet une racine dans \mathbb{C} .*

Preuve.

Nous allons montrer que $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est surjectif, et plus précisément que toutes les valeurs complexes sont prises un même nombre fini de fois par P , sauf peut-être un nombre fini d'entre elles (lesquelles sont également atteintes).

Soit $S = \{z \in \mathbb{C}, P'(z) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de P et $\Sigma = P(S)$ l'ensemble de ses valeurs critiques. S est fini (et donc Σ) car P étant non constant, P' est non nul.

Soit τ l'application qui associe à une valeur $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ le cardinal de $P^{-1}(\alpha)$, la « fibre au-dessus de α ». Ce cardinal est fini car $P - \alpha$ n'est pas le polynôme nul. Nous allons montrer que $\tau : \mathbb{C} \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ est une application localement constante. Admettons-le un instant, on en déduit que τ est constante par connexité de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ (Σ étant fini). Cette constante est non nulle car sinon on aurait $P^{-1}(\Sigma) = \mathbb{C}$, ce qui est absurde puisque $P^{-1}(\Sigma)$ est fini. En particulier, toute valeur régulière est atteinte par P , mais par définition les valeurs critiques sont également atteintes, et le théorème est montré.

Il nous reste donc à montrer que τ est localement constante. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Deux cas se présentent :

- Si $P^{-1}(\alpha) = \emptyset$ (α n'est pas atteinte par P), il s'agit de montrer que $P^{-1}(\beta) = \emptyset$ pour β suffisamment proche de α . Cela découle simplement du fait que l'image de P est fermée dans \mathbb{C} . En effet, P est une application propre (elle est continue et $|P(z)| \rightarrow +\infty$ quand $|z| \rightarrow +\infty$), en particulier c'est une application fermée.
- Sinon, notons $P^{-1}(\alpha) = \{z_1, \dots, z_m\}$. Pour tout $1 \leq i \leq m$, z_i n'est pas un point critique de P donc on peut appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage ouvert U_i de z_i tel que $P|_{U_i}$ soit un difféomorphisme sur son image. Quitte à restreindre, on peut supposer que les U_i sont deux à deux disjoints et qu'ils sont envoyés sur un même ouvert $V \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma$ contenant α . On pose alors $W = V \setminus P((\bigcup_{i=1}^m U_i)^c)$. W contient α et c'est un ouvert car P est une application fermée. On voit alors que si $\beta \in W$, alors β a exactement une image réciproque dans chacun des U_i (et aucune ailleurs), si bien que $\tau(\beta) = m$, ce qui conclut la démonstration.

□

Complément : applications propres entre espaces localement compacts

(Rappelons que par définition, un espace localement compact est séparé.)

Soient X et Y deux espaces topologiques localement compacts. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite propre si elle est continue et si l'image réciproque de tout compact

de Y par f est un compact de X .

Proposition. Soient $\hat{X} = X \cup \{\hat{x}\}$ et $\hat{Y} = Y \cup \{\hat{y}\}$ les compactifiés d'Alexandrov de X et Y . Alors f est propre si et seulement si son prolongement $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ par $f(\hat{x}) = \hat{y}$ est continu.

Preuve.

Supposons que f soit propre. Soit F un fermé de \hat{Y} . Si F contient \hat{y} , alors $\hat{Y} \setminus F$ est un ouvert de \hat{Y} ne contenant pas \hat{y} , c'est donc un ouvert de Y . Il s'ensuit que $\hat{f}^{-1}(\hat{Y} \setminus F) = f^{-1}(\hat{Y} \setminus F)$ est un ouvert de X par continuité de f , c'est donc aussi un ouvert de \hat{X} . On en déduit que $\hat{f}^{-1}(F)$ est fermé dans \hat{X} . Si F ne contient pas \hat{y} , c'est un compact de Y donc $\hat{f}^{-1}(F) = f^{-1}(F)$ est un compact de X par propriété de f . C'est donc un fermé de \hat{X} , et on a montré que \hat{f} est continue.

Supposons maintenant que \hat{f} soit continue. Cela entraîne évidemment que f est continue. Soit K un compact de Y . C'est un fermé de \hat{Y} ne contenant pas \hat{y} , on en déduit que $f^{-1}(K) = \hat{f}^{-1}(K)$ est un fermé de \hat{X} ne contenant pas \hat{x} par continuité de \hat{f} . C'est donc un compact de X , ce qui prouve que f est propre. □

En particulier, on voit que si X et Y sont des espaces vectoriels normés de dimension finie, f est propre si et seulement si elle est continue et $\|x\| \rightarrow +\infty$ entraîne $\|f(x)\| \rightarrow +\infty$ (ce qui est d'ailleurs facile à montrer indépendamment de la propriété précédente).

Proposition. Si $f : X \rightarrow Y$ est propre, c'est une application fermée.

Preuve.

Soit F un fermé de X . $F \cup \{\hat{x}\}$ est fermé dans \hat{X} (son complémentaire dans \hat{X} est $X \setminus F$, qui est ouvert dans X et donc dans \hat{X}). \hat{X} étant compact, $F \cup \{\hat{x}\}$ est donc un compact de \hat{X} . Comme \hat{f} est continue (cf. propriété précédente), on en déduit que $\hat{f}(F \cup \{\hat{x}\}) = f(F) \cup \{\hat{y}\}$ est compact dans \hat{Y} . Son complémentaire $Y \setminus f(F)$ est donc ouvert dans \hat{Y} , comme il ne contient pas \hat{y} c'est aussi un ouvert de Y , d'où on déduit que $f(F)$ est fermé dans Y . □

Leçons possibles

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples et applications.

214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

118 Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.

Références

10 Théorème de BROUWER

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note B la boule unité fermée de \mathbb{R}^n pour une norme quelconque.

THÉORÈME (BROUWER). *Toute application continue $f : B \rightarrow B$ a un point fixe.*

Preuve.

On suppose désormais $n \geq 1$ (le résultat est trivial sinon). Comme « être continu $X \rightarrow X$ et avoir un point fixe » est une propriété invariante par homéomorphisme, on peut supposer que la norme considérée est la norme euclidienne usuelle. Au passage, nous venons de dire que le théorème se généralise à tout espace homéomorphe à B .

Nous allons raisonner par l'absurde : on suppose que f n'a pas de point fixe.

Étape 1 : on peut supposer f de classe C^1 .

Soit $\alpha = \inf_B |f(x) - x|$. Par compacité de B , cette borne inférieure est atteinte, comme f n'a pas de point fixe, $\alpha > 0$.

On sait que l'on peut trouver une fonction g de classe C^1 sur (un voisinage de) B , à valeurs dans \mathbb{R}^n , telle que $\|f - g\|_{\infty, B} < \alpha/2$ (par exemple, grâce au théorème de STONE-WEIERSTRASS).

Si on pose $h(x) = \frac{1}{1+\alpha/2}g(x)$, alors h est de classe C^1 sur B et h est à valeurs dans B . De plus, on vérifie que $\|h - f\|_{\infty} < \alpha$, il s'ensuit que h n'a pas de point fixe dans B . Quitte à remplacer f par h dans la suite de la démonstration, on peut supposer f de classe C^1 .

Étape 2 : Construction d'une rétraction par déformation de classe C^1 de B sur S .

On a noté S la sphère unité de \mathbb{R}^n ($S = \partial B$).

Pour $x \in B$, soit $r(x)$ le point d'intersection de S avec la demi-droite $[f(x), x)$. r est bien définie sur B .

De plus, on vérifie sans mal que r est une application de classe C^1 sur B , toutes les applications intervenant dans la définition de r étant de classe C^1 . Par exemple, on écrit que $h(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$, où $\lambda(x)$ est l'unique solution > 0 de l'équation du second degré en λ $|h(x)|^2 = 1$. On vérifie que les deux solutions réelles de cette équation sont de signes (strictement) contraires, si bien que le discriminant est > 0 . Par la formule donnant les solutions d'une équation du second degré, on en déduit que λ est une application de classe C^1 .

On pose ensuite $F(x, t) = (1-t)x + tr(x)$ pour $t \in [0, 1]$. Il est clair que F est une application de classe C^1 de $B \times [0, 1]$ dans B . De plus, $F(\cdot, 0) = \text{id}_B$, $F(\cdot, 1) = r$, et $F(x, t) = x$ pour

tout $x \in S$ et pour tout $t \in [0, 1]$.

Étape 3 : Constitution de la contradiction.

Soit $P(t) = \int_{\mathring{B}} \det \partial_x F(x, t) dx$ pour $t \in [0, 1]$. Il est clair que P est une fonction polynômiale de t .

Pour $t = 1$, la différentielle de $F(\cdot, 1) = r$ n'est inversible en aucun point de \mathring{B} , car en un tel point r n'est pas un homéomorphisme local sur son image (qui est d'intérieur vide, car $\subset S$). On en déduit que $P(1) = 0$.

Nous allons montrer que $P(t)$ est constant > 0 pour t suffisamment petit, ce qui constituera la contradiction (P serait alors un polynôme constant non nul, or $P(1) = 0$).

Pour cela, il nous suffit de montrer que $F(t, \cdot)$ est un difféomorphisme positif (*i.e.* de jacobien partout > 0) de \mathring{B} pour t suffisamment petit, car la formule de changement de variable donne alors $P(t) = \mathcal{V}(B) > 0$.

On applique le théorème d'inversion globale :

- $\partial_x F(t, x)$ est de déterminant > 0 pour $x \in \mathring{B}$ et t suffisamment petit : cela découle simplement du fait que $t \mapsto \partial_x F(t, x)$ est une application continue, et $\partial_x F(0, x) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.
- $F(t, \cdot)$ est une application injective sur \mathring{B} pour t suffisamment petit : soient $x, y \in \mathring{B}$ tels que $F(t, x) = F(t, y)$. On a donc $(1 - t)(x - y) = t(r(x) - r(y))$. Notons $M = \sup_B \|r'\|$. L'inégalité de la moyenne donne $\|r(x) - r(y)\| \leq M\|x - y\|$, on en déduit que $(1 - t)\|x - y\| \leq tM\|x - y\|$. Pour t suffisamment petit, cela n'est possible que si $x = y$.
- $F(t, \mathring{B}) = \mathring{B}$ pour t suffisamment petit : sachant que $F(t, S) = S$, on a $F(t, B) = F(t, \mathring{B}) \sqcup S$ (union disjointe). Or $F(t, B)$ est un compact et $F(t, \mathring{B})$ est un ouvert de \mathbb{R}^n pour t suffisamment petit (car $F(t, \cdot)|_{\mathring{B}}$ est un difféomorphisme local). On en déduit que $F(t, \mathring{B})$ est ouvert et fermé dans \mathring{B} . Par connexité de \mathring{B} , $F(t, \mathring{B}) = \mathring{B}$.

□

Leçons possibles

(203 Utilisation de la notion de compacité.)

(204 Connexité. Exemples et applications)

206 Utilisation de théorèmes de point fixe.

211 Utilisation de la dimension finie en analyse.

214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.
((**248** Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples.))

Références

?

11 Théorème de GERSHGÖRIN

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle disques de GERSHGÖRIN les disques fermés du plan complexe $D_i = D^f(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$ (pour $1 \leq i \leq n$). On appelle domaine de GERSHGÖRIN $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Proposition. $Sp(A) \subset \mathcal{G}$ (le spectre d'une matrice est contenu dans son domaine de GERSHGÖRIN).

Preuve.

Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé à λ . Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal, on a $x_i \neq 0$ et $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \lambda x_i$. On en déduit que $a_{ii} - \lambda = \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$ puis $|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, ce qui prouve que $\lambda \in D_i$. □

On dit que A est à diagonale strictement dominante si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout i . Il s'ensuit immédiatement de la proposition ci-dessus qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

THÉORÈME. Soit \mathcal{D} une composante connexe de \mathcal{G} . C'est la réunion des D_i qui la rencontrent : $\mathcal{D} = \bigcup_{i \in I} D_i$. Il y a $\#I$ valeurs propres de A dans \mathcal{D} , comptées avec multiplicité.

Preuve.

On note Δ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de A . Pour $r \in [0, 1]$, on pose $A_r = \Delta + r(A - \Delta)$ et on note \mathcal{G}_r le domaine de GERSHGÖRIN de A_r . Remarquons que $A_0 = \Delta$, $A_1 = A$ et que les \mathcal{G}_r croissent de $Sp(\Delta)$ à \mathcal{G} lorsque r croît de 0 et 1.

Notons $p(r)$ le nombre de valeurs propres de A_r contenues dans \mathcal{D} (comptées avec multiplicité).

Comme \mathcal{D} et $\mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$ sont compacts on peut trouver une courbe de JORDAN orientée positivement γ qui sépare \mathcal{D} et $\mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$.

De manière générale, si M est une matrice de valeur propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de multiplicités respectives m_1, \dots, m_s , on a $\frac{\chi'_M(z)}{\chi_M(z)} = \sum_{k=1}^s \frac{m_k}{z - \lambda_k}$ (χ_M désigne le polynôme caractéristique de M). On en déduit que le résidu en λ_k de la fonction méromorphe $\frac{\chi'_M}{\chi_M}$ est m_k .

Dans notre cas, en remarquant que les valeurs propres de A_r qui ne sont pas dans \mathcal{D} sont dans $\mathcal{G} \setminus \mathcal{D}$, le théorème des résidus nous permet d'affirmer que $p(r) = \int_{\gamma} \frac{\chi'_r(z)}{\chi_r(z)} dz$ (où on a noté χ_r le polynôme caractéristique de A_r).

Il est clair que $r \mapsto \chi_r$ et $r \mapsto \chi'_r$ sont des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour la norme « max des coefficients » sur $\mathbb{R}_n[X]$; donc pour toutes les normes en particulier $\|\cdot\|_{\infty, \gamma}$.

Comme χ_r ne s'annule jamais sur l'image de γ , on en déduit que $r \mapsto \frac{\chi_r'(z)}{\chi_r(z)}$ est une application continue pour la norme uniforme. Il s'ensuit que $r \mapsto p(r)$ est une application continue.

Comme p prend des valeurs discrètes, c'est en fait une application constante, en particulier $p(0) = p(1)$. Or il est clair que $p(0) = \#I$, on a donc $\#\text{Sp}(A) \cap \mathcal{D} = \#I$, ce qu'il fallait montrer. □

Leçons possibles

129 Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.

(**126** Endomorphismes diagonalisables.)

(204 Connexité. Exemples et applications)

(**235** Intervern d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.)

(**239** Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.)

(**244** Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.)

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbb{C} .

(**247** Exemples de problèmes d'intervern de limites.)

Références

[Ser01]

12 Théorème de JORDAN

THÉORÈME (JORDAN). Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe continue fermée et sans points doubles. Alors $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a deux composantes connexes.

Preuve.

Précisons d'emblée que cette preuve sera uniquement valable dans le cas où Γ est une courbe de classe \mathcal{C}^1 . On peut alors la paramétrer par une application injective $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 dont la dérivée ne s'annule pas. Pour des raisons de confort, on peut supposer que γ est unitaire (i.e. $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout $t \geq 0$) et que $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = 1$.

On montre dans un premier temps le lemme suivant : si pour $\varepsilon > 0$ on note Γ_ε^+ (resp. Γ_ε^-) la courbe paramétrée par $\gamma_\varepsilon^+(t) = \gamma(t) + i\varepsilon\gamma'(t)$ (resp. $\gamma_\varepsilon^-(t) = \gamma(t) - i\varepsilon\gamma'(t)$), alors pour ε suffisamment petit, disons $\varepsilon < \alpha$, Γ ne rencontre pas Γ_ε^+ (resp. Γ_ε^-).

Si s, t vérifient $\gamma(t) = \gamma_\varepsilon^+(s)$, alors $|\gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))| = |(i\varepsilon - (t-s))\gamma'(s)| = |\varepsilon - (t-s)|$, d'où $|\gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))| > |t-s|$. Ceci est exclu pour $|t-s|$ suffisamment petit du fait que γ est de classe \mathcal{C}^1 sur le compact \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Montrons-le : par uniforme continuité de γ' (en vertu du théorème de HEINE), on peut choisir $\eta > 0$ pour que $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < 1$ dès que $|t-s| < \eta$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis entre s et t à la fonction $\theta \mapsto \gamma(\theta) - (\gamma(s) + (\theta-s)\gamma'(s))$, on obtient l'inégalité voulue.

On pose alors $\alpha = \inf_{|t-s| \geq \eta} |\gamma(t) - \gamma(s)|$. Cette borne inférieure est atteinte car $\{(t, s) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2, |t-s| \geq \eta\}$ est compact et $(t, s) \mapsto \gamma(t) - \gamma(s)$ est une application continue, on en déduit que $\alpha > 0$ par injectivité de γ . Maintenant si $\varepsilon < \alpha$, alors soit $|t-s| < \eta$ et dans ce cas $\gamma(t) \neq \gamma_\varepsilon^+(s)$ par le point précédent, soit $|t-s| \geq \eta$ et dans ce cas $|\gamma(t) - \gamma_\varepsilon^+(s)| = |\gamma(t) - \gamma(s) - i\varepsilon\gamma'(s)| \geq \|\gamma(t) - \gamma(s)\| - \varepsilon \geq \alpha - \varepsilon > 0$. Ainsi Γ ne rencontre pas Γ_ε^+ . Quitte à changer ε en $-\varepsilon$ jusqu'à la dernière ligne de notre argument, nous avons aussi montré que Γ ne rencontre pas Γ_ε^- , et le lemme est montré.

On fixe désormais $\varepsilon < \alpha$. Γ_ε^+ et Γ_ε^- sont donc deux parties connexes par arcs de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$; nous allons voir que tout point de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ peut-être relié à Γ_ε^+ ou à Γ_ε^- par un chemin continu dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ (un segment de droite en fait), on aura ainsi montré que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a au plus deux composantes connexes.

Soit donc $z \notin \Gamma$. La distance de z à Γ est atteinte en un point $\gamma(t_0)$ (par compacité de Γ) qui vérifie $(z - \gamma(t_0)) \perp \gamma'(t_0)$. En effet, t_0 minimise la fonction dérivable $t \mapsto |z - \gamma(t)|^2$, il suffit d'écrire que la dérivée en t_0 de cette fonction est nulle. On en déduit que la demi-droite $[\gamma(t_0), z)$ rencontre Γ_ε^+ au point $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$, ou Γ_ε^- au point $\gamma_\varepsilon^-(t_0)$. Supposons par exemple que l'on est dans le premier cas et montrons que le segment $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$ ne rencontre pas Γ . Deux cas sont possibles :

- $\gamma(t_0)$, $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$ et z sont alignés dans ce sens. Dans ce cas si $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$ rencontrait Γ cela contredirait la minimalité de $|z - \gamma(t)|$.
- $\gamma(t_0)$, z et $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$ sont alignés dans ce sens. Dans ce cas si $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$ rencontrait Γ , ce point serait également sur un $\Gamma_{\varepsilon'}^+$ avec $\varepsilon' \leq \varepsilon$, ce qui contredirait le lemme.

Enfin, il reste à montrer que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a au moins deux composantes connexes. Pour cela il suffit de trouver deux points de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ qui n'ont pas le même indice par rapport à Γ . Pour ε suffisamment petit, $z_\varepsilon^+ = \gamma_\varepsilon^+(0) = i\varepsilon$ et $z_\varepsilon^- = \gamma_\varepsilon^-(0) = -i\varepsilon$ conviennent. Montrons-le :

$$I(\Gamma, z_\varepsilon^+) - I(\Gamma, z_\varepsilon^-) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{\gamma(t) - z_\varepsilon^+} - \frac{1}{\gamma(t) - z_\varepsilon^-} \right) \gamma'(t) dt = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2}$$

On voudrait faire tendre ε vers 0 dans l'intégrale mais il faut prendre des précautions : le dénominateur s'annule en $t = 0$, $\varepsilon = 0$ (et seulement en ce point). Écrivons que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t)}{t} = \gamma'(0) = 1$ donc pour t suffisamment petit, disons $|t| \leq \delta$, on a $\left| \frac{\gamma(t)^2}{t^2} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$. On coupe l'intégrale en deux :

$$I(\Gamma, z_\varepsilon^+) - I(\Gamma, z_\varepsilon^-) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\delta < |t| < 1/2} \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2}$$

La fonction $(\varepsilon, t) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2}$ est continue sur le compact $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times ([-1/2, -\delta] \cup [\delta, 1/2])$ (où on aura fixé $\varepsilon_0 < \alpha$), elle y est donc dominée par une constante indépendante de ε et t . On en déduit que $\left| \int_{\delta < |t| < 1/2} \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2} \right|$ est majoré par une constante indépendante de ε , d'où

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\delta < |t| < 1/2} \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

D'autre part, en faisant le changement de variable $t = \varepsilon u$, il vient

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t)^2 + \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta/\varepsilon}^{\delta/\varepsilon} \frac{\varepsilon \gamma'(\varepsilon u) du}{\varepsilon^2 + \gamma(\varepsilon u)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\varepsilon u)}{1 + u^2 \frac{\gamma(\varepsilon u)^2}{(\varepsilon u)^2}} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]} du$$

δ a été choisi de sorte que $\left| \frac{\gamma'(\varepsilon u)}{1 + u^2 \frac{\gamma(\varepsilon u)^2}{(\varepsilon u)^2}} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]} \right| \leq \frac{1}{1 + \frac{u^2}{2}}$ pour tout $\varepsilon > 0$ (et pour tout $u \in \mathbb{R}$), on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de LEBESGUE :

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\varepsilon u)}{1 + u^2 \frac{\gamma(\varepsilon u)^2}{(\varepsilon u)^2}} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]} du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1 + u^2} = 1$$

Finalement, on a montré que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\Gamma, z_\varepsilon^+) - I(\Gamma, z_\varepsilon^-) = 1$, donc (au moins) pour ε assez petit $I(\Gamma, z_\varepsilon^+) \neq I(\Gamma, z_\varepsilon^-)$, ce qui termine la démonstration.

Remarque : Il est clair qu'une seule des deux composantes connexes de $C \setminus \Gamma$ est non bornée, on l'appelle *extérieur* de Γ , et on appelle *intérieur* de Γ l'autre composante connexe. \square

Leçons possibles

203 Utilisation de la notion de compacité.

- 204 Connexité. Exemples et applications.
216 Étude de courbes. Exemples.
244 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.
245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbb{C} .

Références

[Pel].

gonnord tosel cdiff

13 Méthode du gradient à pas conjugué

Étant donné $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, le but est de résoudre numériquement l'équation $Ax = b$.

On note x^* l'unique solution de l'équation, on cherche à construire une suite $(x_k)_{k \geq 0}$ qui converge le plus rapidement possible vers x^* .

Proposition. Soit $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $J(x) = \frac{1}{2} {}^t x A x - {}^t x b$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $J(x) = \frac{1}{2} \|x - x^*\|_A^2 + J(x^*)$. Ainsi, x^* est l'unique point qui minimise J .

Preuve.

Rappelons que $\|\cdot\|_A$ est une norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle x, y \rangle_A = {}^t x A y$. On écrit que

$$\frac{1}{2} \|x - x^*\|_A^2 + J(x^*) = \frac{1}{2} {}^t (x - x^*) A (x - x^*) + \frac{1}{2} {}^t x^* A x^* - {}^t x^* b$$

soit encore

$$\frac{1}{2} \|x - x^*\|_A^2 + J(x^*) = J(x) + {}^t x^* A x^* - {}^t x^* b$$

Et comme $Ax^* = b$, il vient $\frac{1}{2} \|x - x^*\|_A^2 + J(x^*) = J(x)$, ce qu'il fallait. □

Proposition. Sur tout sous-espace affine \mathcal{K} de \mathbb{R}^n , J atteint son minimum en un point unique $x_{\mathcal{K}}$. De plus, $x_{\mathcal{K}}$ est caractérisé par $b - Ax_{\mathcal{K}} \perp K$, où K désigne ici la direction de \mathcal{K} .

On aurait pu simplement écrire $b - Ax_{\mathcal{K}} \perp \mathcal{K}$ (par définition de l'orthogonalité à un sous-espace affine), mais cela aurait pu prêter à confusion : $b - Ax_{\mathcal{K}}$ n'est pas orthogonal aux vecteurs de \mathcal{K} .

Preuve.

$\|\cdot\|_A$ étant une norme euclidienne, il existe un unique point $x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$ qui réalise la distance de x^* à \mathcal{K} : il s'agit du projeté orthogonal (relativement à $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$) de x^* sur \mathcal{K} . On en déduit immédiatement que $x_{\mathcal{K}}$ est l'unique point qui minimise J sur \mathcal{K} en vertu de la proposition précédente.

De plus, on sait que ce point est caractérisé par $x^* - x_{\mathcal{K}} \perp_A K$, soit encore $A(x^* - x_{\mathcal{K}}) \perp K$, et comme $Ax^* = b$ on a le résultat voulu. □

Proposition. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, posons $r_0 = b - Ax_0$ et $K_k = \text{Vect}(r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Si on note x_k le point qui minimise J sur $x_0 + K_k$, alors la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ stationne sur x^* en au plus n itérations.

Preuve.

Si on note $r_k = b - Ax_k$, on a vu que x_k est caractérisé par $r_k \perp K_k$ pour $k \geq 1$. Par ailleurs, on remarque que $r_k \in K_{k+1}$ pour tout $k \geq 0$: $r_k = b - Ax_k = r_0 - A(x_k - x_0)$, et $x_k - x_0 \in K_k$ donc $A(x_k - x_0) \in K_{k+1}$.

La suite de sous-espaces vectoriels $(K_k)_{k \geq 1}$ est croissante, elle est donc stationnaire. De plus, si $K_{k_0} = K_{k_0+1}$ alors on voit que nécessairement la suite stationne sur K_{k_0} . On en déduit que cela arrive en au plus n étapes pour des raisons de dimension. Enfin, on a dans ce cas $r_{k_0} \perp K_{k_0}$ et $r_{k_0} \in K_{k_0+1} = K_{k_0}$, on en déduit que $r_{k_0} = 0$ i.e. $b = Ax_{k_0}$ puis $x_{k_0} = x^*$ par unicité. \square

Deuxième preuve.

On se convaincra sans mal que $x \in x_0 + K_k$ si et seulement si il existe un polynôme P de degré $\leq k$ et de terme constant 1 tel que $x^* - x = P(A)(x_0 - x^*)$. On en déduit que $x^* \in K_n$ en prenant par exemple $P = \frac{\chi_A}{\det A}$ (où χ_A désigne le polynôme caractéristique de A). \square

Proposition. On note $d_k = x_{k+1} - x_k$ et $r_k = b - Ax_k$ pour $k \geq 0$. On a alors $K_k = \text{Vect}(r_0, \dots, r_{k-1}) = \text{Vect}(d_0, \dots, d_{k-1})$ pour tout $k \geq 1$. De plus, les vecteurs r_0, \dots, r_{k-1} sont orthogonaux et les vecteurs d_0, \dots, d_{k-1} sont A -orthogonaux.

Preuve.

Le résultat est trivial si $r_0 = 0$, on suppose désormais $r_0 \neq 0$. Soit $k_0 \leq n$ le plus petit entier non nul tel que $K_{k_0} = K_{k_0+1}$. Si on montre le résultat pour $k \leq k_0$, il sera évidemment vrai pour $k > k_0$ (dans ce cas, $r_{k-1} = d_{k-1} = 0$).

On a vu que $r_k \in K_{k+1}$ pour tout $k \geq 0$ et $r_k \perp K_k$ pour tout $k \geq 1$. Les r_k sont donc orthogonaux, de plus $r_{k-1} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq k_0$, on en déduit que $K_k = \text{Vect}(r_0, \dots, r_{k-1})$ pour des raisons de dimension. D'autre part, il est clair que $d_k = x_{k+1} - x_k \in K_{k+1}$ pour tout $k \geq 0$, de plus $d_{k-1} \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq k_0$. De nouveau, il nous suffit de montrer que les d_k sont A -orthogonaux. Soient $0 \leq l < k$, on a $\langle d_k, d_l \rangle_A = \langle Ad_k, d_l \rangle$, or $Ad_k = Ax_{k+1} - Ax_k = -r_{k+1} + r_k$ et $d_l \in K_{l+1} \subset K_k$, d'où $\langle d_k, d_l \rangle_A = 0$. \square

Algorithme du gradient conjugué. La proposition précédente montre que l'on peut explicitement calculer d_k , et donc x_k , de manière itérative.

En effet, supposons connus r_k et d_k . On calcule alors $r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(d_k + x_k)$, soit $r_{k+1} = r_k - Ad_k$. Si $r_{k+1} = 0$, c'est terminé. Sinon, on détermine d_{k+1} à un scalaire non nul près grâce au procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT (pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$). Ce scalaire est ensuite déterminé grâce à la relation $\langle d_{k+1}, r_{k+1} \rangle_A = \|r_{k+1}\|^2$, obtenue en prenant le produit scalaire usuel avec r_{k+1} dans la relation $r_{k+2} = r_{k+1} - Ad_{k+1}$.

Reste à initialiser l'algorithme : r_0 est connu mais ce n'est pas le cas de $d_0 = x_1 - x_0$ a priori. En fait, $d_0 \in \text{Vect}(r_0)$ est connu à un scalaire non nul près, et le raisonnement

ci-dessus s'applique.

Revenons maintenant un petit peu plus dans les calculs. On écrit que d_{k+1} est colinéaire à d'_{k+1} avec $d'_{k+1} = r_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i d_i$. α_i est donné par $0 = \langle r_{k+1}, d_i \rangle_A + \alpha_i \|d_i\|_A^2$. Or $\langle r_{k+1}, d_i \rangle_A = \langle r_{k+1}, Ad_i \rangle$ avec $d_i \in K_{i+1}$ donc $Ad_i \in K_{i+2}$. On en déduit que $\langle r_{k+1}, d_i \rangle_A = 0$ sauf si $i = k$. Dans ce cas, $\langle r_{k+1}, d_k \rangle_A = \langle r_{k+1}, Ad_k \rangle = \langle r_{k+1}, r_k - r_{k+1} \rangle$ soit $\langle r_{k+1}, d_k \rangle_A = -\|r_{k+1}\|^2$. Par ailleurs, $\|d_k\|_A^2 = \langle Ad_k, d_k \rangle = \langle r_k - r_{k+1}, d_k \rangle = \langle r_k, d_k \rangle$. Finalement, peut choisir $d'_{k+1} = \langle r_k, d_k \rangle r_{k+1} + \|r_{k+1}\|^2 d_k$. Enfin, on détermine λ tel que $d_{k+1} = \lambda d'_{k+1}$ en écrivant que $\langle d_{k+1}, r_{k+1} \rangle_A = \|r_{k+1}\|^2$ soit $\lambda = \frac{\|r_{k+1}\|^2}{\langle Ad'_{k+1}, r_{k+1} \rangle}$.

On peut donc écrire l'algorithme de la manière suivante :

```

** Initialisation **
x ∈ ℝn quelconque.
r := b - Ax
d := r

tant que ||r|| > ε
  d :=  $\frac{\|r\|^2}{\langle Ad, r \rangle} d$ 
  x := x + d
  r' := r - Ad
  d :=  $\langle r, d \rangle r' + \|r'\|^2 d$ 
  r := r'
fin tant que

```

On sait que l'algorithme converge en au plus n étapes. Dans la pratique, n peut être grand et la précision machine est atteinte en beaucoup moins d'itérations. On a en particulier le résultat suivant :

Proposition. *La méthode du gradient à pas conjugué converge mieux que toutes les méthodes dites de gradient. En particulier, la convergence est au moins géométrique.*

Preuve.

Dans les méthodes de gradient, on pose $x_{k+1} = x_k - \rho_k (Ax_k - b)$, où $\rho_k > 0$. On peut mentionner ici que $Ax_k - b$ est en fait le gradient de la fonction J , d'où le nom de la méthode (l'idée est que J diminue le plus fortement dans la demi-direction $-\vec{\nabla} J$). Par une récurrence immédiate, on voit que $x_k \in x_0 + K_k$. Or dans la méthode du gradient à pas conjugué, x_k minimise J sur $x_0 + K_k$, d'où le résultat.

On peut démontrer rapidement que la méthode du gradient à pas constant converge géométriquement : si on choisit $\rho_k = \rho$ suffisamment petit pour que le rayon spectral r de $I - \rho A$ soit < 1 , on a $x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \rho (Ax_k - Ax^*)$ soit $x_{k+1} - x^* = (I - \rho A)(x_k - x^*)$. On en déduit que $\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq r \|x_k - x^*\|_2$, d'où le résultat annoncé. □

Leçons possibles

212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

219 Problèmes d'extremums.

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

224 Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

Références

[AK02].

[Pel].

14 Méthode de quadrature élémentaire de GAUSS

THÉORÈME. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ un poids et $l \in \mathbb{N}$. Il existe alors une unique subdivision de I à $l + 1$ points $\sigma = (x_0, \dots, x_l)$ et une unique famille de réels $(\lambda_0, \dots, \lambda_l)$ telle que la méthode élémentaire de quadrature donnée par $\int_I f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{j=0}^l \lambda_j f(x_j)$ soit d'ordre $\geq 2l + 1$.

Cette méthode est d'ordre $2l + 1$. De plus, pour une fonction f de classe \mathcal{C}^{2l+2} sur I , il existe $\xi \in I$ tel que $E(f) = \frac{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}^2}{(2l+2)!} f^{(2l+2)}(\xi)$, où π_{l+1} est le $l + 1$ -ème polynôme orthogonal associé au poids ω (et on a noté $E(f) = \int_I f(x)\omega(x)dx - \sum_{i=0}^l \lambda_i f(x_i)$).

Rappels :

- Un poids $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, partout > 0 et telle que $\int_I |x|^n \omega(x)dx < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (autrement dit les polynômes sont intégrables pour la mesure ωdx). En particulier si I est borné toute fonction > 0 intégrable convient.
- Une méthode de quadrature est dite d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si elle est exacte pour les polynômes de degrés $\leq p$, et inexacte pour au moins un polynôme de degré $p + 1$.
- $L^2(I, \omega dx)$ est un espace de HILBERT pour le produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle_\omega = \int_I f(x)g(x)\omega(x)dx$.
- On note π_{l+1} le $l + 1$ -ème polynôme orthogonal associé à ω , c'est-à-dire le polynôme unitaire qui dirige la droite vectorielle de $\mathbb{R}_{l+1}[X]$ orthogonale à $\mathbb{R}_l[X]$ (pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$).

Preuve du théorème.

On commence par montrer l'unicité : supposons donnés une subdivision σ de I et des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_l$ comme dans l'énoncé.

On pose alors $\tilde{\pi}(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n)$. $\tilde{\pi}$ est un polynôme unitaire de degré $l + 1$. Soit $P \in \mathbb{R}_l[X]$, $P\tilde{\pi}$ est un polynôme de degré $\leq 2l + 1$ donc la formule de quadrature est exacte, elle donne $\int_I \tilde{\pi}(x)P(x)\omega(x)dx = 0$. On vient de montrer que $\tilde{\pi}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_l[X]$, on a donc $\tilde{\pi} = \pi_{l+1}$. Par suite, les x_i sont nécessairement les racines de π_{l+1} .

Soit L_i le i -ème polynôme d'interpolation de LAGRANGE associé à la subdivision σ . L_i est de degré l donc la formule de quadrature est exacte pour L_i , elle donne $\int_I L_i(x)\omega(x)dx = \lambda_i$. Les λ_i sont donc également déterminés sans équivoque.

Réciproquement, vérifions que les points x_i et les scalaires λ_i trouvés ci-dessus conviennent. Il nous faut déjà justifier que π_{l+1} a toutes ses racines dans I et distinctes. Soit $P(x) = \prod_{k \in F} (x - x_k)$, le produit étant pris sur les indices k tels que x_k soit une racine dans I d'ordre impair de π_{l+1} . $P\pi_{l+1}$ est de signe constant dans I , donc $\int_I P(x)\pi_{l+1}(x)\omega(x)dx \neq 0$.

Comme $\pi_{l+1} \perp_{\omega} \mathbb{R}_l[X]$, P est nécessairement de degré $l + 1$; il s'ensuit que toutes les racines de π_{l+1} sont simples et dans I .

Montrons maintenant que la méthode est d'ordre $\geq 2l + 1$. On sait déjà qu'elle est exacte pour les L_i , qui forment une base de $\mathbb{R}_l[X]$. La méthode est donc exacte pour tous les polynômes de degrés $\leq l$ (autrement dit elle est d'ordre $\geq l$).

Soit $p \in \mathbb{R}_{2l+1}[X]$, on effectue la division euclidienne de p par π_{l+1} : $p = q\pi_{l+1} + r$, avec $r = 0$ ou $d^\circ r < l + 1$ et $d^\circ q \leq l$. On a alors $\int_I p(x)\omega(x)dx = \int_I q(x)\pi_{l+1}(x)\omega(x)dx + \int_I r(x)\omega(x)dx$. Sachant que $\langle q, \pi_{l+1} \rangle_{\omega} = 0$, que la formule est exacte pour r et que $r(x_i) = p(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq l$, il vient $\int_I p(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i p(x_i)$, ce qui prouve que la formule est exacte pour p . On a donc montré que la méthode est d'ordre $\geq 2l + 1$.

Reste à montrer que la méthode n'est pas d'ordre $> 2l + 1$ et l'estimation de l'erreur annoncée. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{2l+2} sur I . L'application $\mathbb{R}_{2l+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{2l+2}$, $P \mapsto (P(x_i), P'(x_i))_{0 \leq i \leq l}$ est linéaire et injective, elle est donc surjective pour des raisons de dimension. Il existe donc un unique polynôme $H \in \mathbb{R}_{2l+1}[X]$ tel que $H(x_i) = f(x_i)$ et $H'(x_i) = f'(x_i)$ pour tout i . On écrit ensuite que $E(f) = \int_I f(x)\omega(x)dx - \sum_{i=0}^l \lambda_j f(x_j)$ avec $\sum_{i=0}^l \lambda_j f(x_j) = \sum_{i=0}^l \lambda_j H(x_j) = \int_I H(x)\omega(x)dx$ puisque la formule est exacte pour H . On a donc $E(f) = \int_I (f(x) - H(x))\omega(x)dx$.

Soit $x \in I \setminus \{x_0, \dots, x_l\}$, on pose $\varphi_x(t) = f(t) - H(t) - k_x(\pi_{l+1}(t))^2$, où k_x est choisi pour que $\varphi_x(x) = 0$. En appliquant le théorème de ROLLE, étant donné que φ_x s'annule en x et en tous les x_i , on trouve $l + 1$ points distincts et différents des x_i où φ'_x s'annule. En rajoutant les x_i , cela fait $2l + 2$ points où φ'_x s'annule. Il existe donc un point $c_x \in I$ tel que $\varphi_x^{(2l+2)}(c_x) = 0$ (pour le voir, on applique le théorème de ROLLE autant de fois que possible successivement aux dérivées de φ_x). On en déduit que $k_x = \frac{f^{(2l+2)}(c_x)}{(2l+2)!}$, puis $f(x) - H(x) = \frac{f^{(2l+2)}(c_x)}{(2l+2)!}(\pi_{l+1}(x))^2$.

En notant $m = \inf_I f^{(2l+2)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $M = \sup_I f^{(2l+2)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on a donc $\frac{m}{(2l+2)!}(\pi_{l+1}(x))^2 \leq f(x) - H(x) \leq \frac{M}{(2l+2)!}(\pi_{l+1}(x))^2$ pour tout $x \in I$ différent des x_i , puis pour tout $x \in I$ par continuité. Il s'ensuit que $\frac{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}}{(2l+2)!}m \leq E(f) \leq \frac{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}}{(2l+2)!}M$, ce qu'on écrit encore $m \leq \frac{(2l+2)!}{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}}E(f) \leq M$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in I$ tel que $\frac{(2l+2)!}{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}}E(f) = f^{(2l+2)}(\xi)$. On en déduit l'estimation annoncée : $E(f) = \frac{\|\pi_{l+1}\|_{2,\omega}}{(2l+2)!}f^{(2l+2)}(\xi)$.

En particulier, si $f(x) = x^{2l+2}$, il vient $E(f) = \|\pi_{l+1}\|_{2,\omega} > 0$, ce qui prouve que la méthode est d'ordre exactement $2l + 1$. \square

Leçons possibles

(118 Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.)

212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

(233 Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.)

(236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.)

238 Méthodes de calcul approché d'intégrales.

248 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples.

Références

[Dem06]

[Pel]

15 Théorème de HADAMARD-LÉVY

THÉORÈME (HADAMARD-LÉVY). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Sont équivalents :

- i) f est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n
- ii) $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et f est propre.

Preuve.

Le sens i) \Rightarrow ii) est facile : si f est un difféomorphisme, $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et f^{-1} étant continue, elle transforme un compact en un compact.

On s'intéresse maintenant à la réciproque : supposons que $f'(x)$ soit inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que f soit propre. On montre d'abord que f est surjective. En effet, f est un difféomorphisme local d'après la théorème d'inversion locale, c'est donc une application ouverte. D'autre part, f est propre donc c'est une application fermée. En particulier, l'image de f est ouverte et fermée dans \mathbb{R}^n , qui est connexe, et elle est évidemment non vide, on en déduit que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

D'après le théorème d'inversion globale, il nous suffit à présent de montrer que f est injective.

La démonstration que nous proposons sera valable dans le cas où f est de classe \mathcal{C}^2 , ce qu'on suppose désormais. Soit donc $y \in \mathbb{R}^n$ et $S = f^{-1}(\{y\})$ la fibre au-dessus de y , on veut montrer que S est réduit à un point. Quitte à considérer la fonction $f - y$, on peut supposer que $y = 0$.

On montre déjà que S est fini. En effet, S est compact car f est propre, s'il était infini il aurait donc un point d'accumulation. Cela contredirait l'injectivité locale de f en ce point (on rappelle que f est un difféomorphisme local).

Reste à montrer que S ne contient qu'un point. Pour cela on introduit le champ de vecteurs V défini sur \mathbb{R}^n par $V(x) = -f'(x)^{-1}.f(x)$, qui est de classe \mathcal{C}^1 . On note φ son flot local.

Montrons dans un premier temps que ce flot est défini pour tout $t \geq 0$. D'après le principe des majorations *a priori* (théorème de fuite à la frontière), il suffit de montrer que $\varphi_t(x)$ est borné pour $t \geq 0$. Pour cela on remarque que $\frac{d}{dt}f(\varphi_t(x)) = f'(\varphi_t(x)).V(\varphi_t(x)) = -f(\varphi_t(x))$. On en déduit que $f(\varphi_t(x)) = e^{-t}f(x)$ qui est borné pour $t \geq 0$ (par $|f(x)|$), puis que $\varphi_t(x)$ est borné par propriété de f (on utilise ici le fait que $E = \mathbb{R}^n$ est de dimension finie).

On remarque ensuite que les points x_1, \dots, x_s de S sont des points critiques asymptotiquement stables. En effet, fixons $i \in \{1, \dots, s\}$, il est clair d'une part que $V(x_i) = 0$. D'autre part, il existe un voisinage ouvert \mathcal{U} de x_i (resp. \mathcal{V} de 0) tel que f réalise un difféomorphisme de \mathcal{U} sur \mathcal{V} . Quitte à restreindre, on peut supposer que \mathcal{V} est une boule ouverte. Soit $x \in \mathcal{U}$, on a $e^{-t}f(x) \in \mathcal{V}$ pour tout $t \geq 0$ donc la courbe $t \mapsto f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t}f(x))$ est bien définie (et à valeurs dans \mathcal{U}), on vérifie de plus immédiatement que c'est (la restriction d') une courbe intégrale. On en conclue par unicité que $\varphi_t(x) = f_{|\mathcal{U}}^{-1}(e^{-t}f(x))$ puis que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = x_i$ par continuité de $f_{|\mathcal{U}}^{-1}$.

On pose alors $\mathcal{O}_i = \{x \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = x_i\}$. On a déjà montré que \mathcal{O}_i est un voisinage de x_i (il contient \mathcal{U}). \mathcal{O}_i est en fait un ouvert : c'est une application directe du théorème de continuité par rapport aux conditions initiales. On peut soit préciser cet argument, soit simplement utiliser la continuité de φ_t (qui est un corollaire immédiat du théorème) : on écrit que $\mathcal{O}_i = \{x \in \mathbb{R}^n, \exists t \geq 0 \varphi_t(x) \in \mathcal{U}\} = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t^{-1}(\mathcal{U})$ qui est bien un ouvert.

On montre enfin que $\bigcup_{i=1}^s \mathcal{O}_i = \mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a vu que $\varphi_t(x)$ est borné pour $t \geq 0$, $\varphi_t(x)$ a donc une valeur d'adhérence qui ne peut être que l'un des x_i par continuité de f (rappelons que $f(\varphi_t(x)) = e^{-t}f(x)$). Or nous avons déjà montré que si $\varphi_t(x)$ se retrouve suffisamment proche de x_i (ce qui est le cas puisque x_i est une valeur d'adhérence), $\varphi_t(x)$ tend vers x_i quand $t \rightarrow +\infty$ (c'est la stabilité asymptotique de x_i).

Pour conclure, les \mathcal{O}_i sont des ouverts non vides et évidemment disjoints dont la réunion est \mathbb{R}^n , il y en a donc au plus un par connexité de \mathbb{R}^n . Ceci prouve que S est réduit à un point et termine la démonstration.

Remarque : On ne s'est pas vraiment servi de la classe \mathcal{C}^2 de f , mais seulement du fait que le champ de vecteur V est localement lipschitzien, ce qui est assuré dès que f' est lipschitzienne par exemple.

□

Leçons possibles

204 Connexité. Exemples et applications

211 Utilisation de la dimension finie en analyse.

214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.

Références

[QZ02] pp392-394.

[Jim].

16 Suites équiréparties modulo 1

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est dite équirépartie si pour tout intervalle ouvert I de S^1 , $\frac{\#\{1 \leq k \leq n, x_k \in I\}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda(I)$.

Quelques précisions : par définition, un intervalle de S^1 est l'image d'un intervalle de \mathbb{R} par la projection canonique $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $\lambda(I)$ désigne alors la mesure de I vu comme partie de $[0, 1[$. Par exemple, un intervalle ouvert I de S^1 est soit un intervalle $]a, b[$ de $[0, 1[$ soit la réunion de deux intervalles disjoints $]0, b[$ et $]a, 1[$. Dans les deux cas, on note $I =]a, b[$. Il est clair que pour montrer qu'une suite est équirépartie, il suffit de le vérifier sur les « vrais » intervalles de $[0, 1[$.

Proposition (Critère de WEYL). *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de S^1 . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}(S^1)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_{S^1} f(x) dx$.

(iii) $\forall l \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi l x_k} = 0$.

Preuve.

« (i) \Rightarrow (ii) » : Par définition, la propriété (ii) est vérifiée pour les indicatrices d'intervalles, donc pour les fonctions en escalier par linéarité.

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (autrement dit, à identification près, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et f 1-périodique). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier u sur $[0, 1[$ telle que $\|f - u\|_{\infty, [0, 1[} \leq \varepsilon/3$.

Par inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \int_{S^1} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - u(x_k)| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(x_k) - \int_0^1 u(x) dx \right| + \int_0^1 |f(x) - u(x)| dx$$

Le premier et le troisième terme du membre de droite sont $\leq \varepsilon/3$. Comme la propriété (ii) est vérifiée pour u , le deuxième terme est aussi $\leq \varepsilon/3$ dès que n assez grand. On a donc

montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_{S^1} f(x) dx$, ce qu'il fallait.

On remarquera que cette preuve s'applique sans problème aux fonctions réglées et même aux fonctions RIEMANN-intégrables.

« (ii) \Rightarrow (iii) » : C'est évident, il suffit de prendre $f : x \mapsto e^{2i\pi l x}$.

« (iii) \Rightarrow (ii) » : Par définition, (ii) est vérifiée pour les fonctions $x \mapsto e^{2i\pi lx}$ pour $l \in \mathbb{Z}^*$, mais aussi pour $l = 0$ (c'est évident). Par linéarité, (ii) est vérifiée pour les polynômes trigonométriques. D'après le théorème de FÉJER, f est limite uniforme de polynômes trigonométriques. On reprend alors mot pour mot la preuve de (i) \Rightarrow (ii).

« (ii) \Rightarrow (i) » : il s'agit de montrer que (ii) est vérifiée pour les indicatrices d'intervalles.

Il suffit de le montrer pour une indicatrice de la forme $u : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq c \\ 1 & \text{si } c < x < 1 \end{cases}$ (avec

$0 < c < 1$, car une indicatrice d'intervalle est une combinaison linéaire (une différence en fait) de telles fonctions.

$$c - \varepsilon \quad c$$

ATTENTION g et h ne sont pas dans $\mathcal{C}(S^1)$. Il faut se ramener à $u = \mathbf{1}_{]c,d[}$ et « symétriser » les fonctions du dessin.

Soit $\varepsilon > 0$ et g, h deux fonctions telles que $g \leq u \leq h$ comme sur le dessin. On a alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(x_k) - \int_0^1 u \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(x_k) - \int_0^1 u \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \int_0^1 u$$

Comme g et h sont continues, (ii) est vérifiée pour g et h si bien qu'en passant à la limite (inférieure et supérieure) on obtient

$$\int_0^1 (g - u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(x_k) - \int_0^1 u \right) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(x_k) - \int_0^1 u \right) \leq \int_0^1 (f - u)$$

soit encore

$$-\varepsilon/2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(x_k) - \int_0^1 u \right) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(x_k) - \int_0^1 u \right) \leq \varepsilon/2$$

Comme ceci est vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(x_k) - \int_0^1 u \right) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(x_k) - \int_0^1 u \right) = 0$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(x_k) - \int_0^1 u \right) = 0$. □

A rajouter : $(x + \alpha n)_{n \geq 0}$ équirépartie mod 1 ssi $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\log(n)$ pas équirépartie mod 1 comme application de la formule d'euler mac laurin à l'ordre 1.

Leçons possibles

202 Exemples de parties denses et applications.

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

224 Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

(**233** Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.)

(**235** Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.)

238 Méthodes de calcul approché d'intégrales.

(**247** Exemples de problèmes d'interversion de limites.)

Références

alessandri ?

17 Méthode de NEWTON

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que x^* un zéro de f tel que f est deux fois dérivable sur un voisinage de x^* , f'' est bornée (sur ce voisinage) et $f'(x^*) \neq 0$.

THÉORÈME. *Pour x_0 suffisamment proche de x^* , la suite définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quadratiquement vers x^* .*

On montrera en particulier qu'une telle suite est bien définie.

Preuve.

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f'(x^*) > 0$. Ainsi (par continuité) $f' > 0$ sur un voisinage $J = [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$ de x^* .

Posons $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ pour $x \in J$. $\forall x \in J$, $\varphi(x) - \varphi(x^*) = x - x^* - \frac{f(x)}{f'(x)}$ soit $\varphi(x) - \varphi(x^*) = \frac{f(x^*) - f(x) - (x^* - x)f'(x)}{f'(x)}$. D'après la formule de TAYLOR-LAGRANGE,

il existe $c \in]x, x^*[$ (ou $]x^*, x[$) tel que $\varphi(x) - \varphi(x^*) = \frac{f''(c)(x - x^*)^2}{2f'(x)}$. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que $|\varphi(x) - \varphi(x^*)| \leq M(x - x^*)^2$ pour tout $x \in J$.

Montrons maintenant que quitte à restreindre, l'intervalle J est stable par φ . On déduit de l'inégalité précédente que $|\varphi(x) - x^*| \leq M\alpha^2$, d'où $|\varphi(x) - x^*| < \alpha$ pourvu que l'on ait choisi α assez petit pour que $\alpha M < 1$. Ainsi la suite (x_n) est bien définie.

De plus, on a $\forall n \geq 0$ $|x_{n+1} - x^*| = |\varphi(x_n) - \varphi(x^*)|$ d'où $|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$. Ceci se réécrit $M|x_{n+1} - x^*| \leq (M|x_n - x^*|)^2$; on en déduit par une récurrence immédiate que $M|x_n - x^*| \leq \rho^{2^n}$ où $\rho = M|x_0 - x^*| < 1$. Ceci prouve que la convergence est quadratique. \square

Proposition. *Sous les hypothèses précédentes, si f est deux fois dérivable sur I et convexe sur I , alors toute condition initiale $\geq x^*$ convient.*

Preuve.

φ est désormais définie sur I . Montrons que φ laisse $[x^*, \sup I[$ invariant. Par convexité, on a $f'' \geq 0$ sur I . Comme f' est croissante, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x > x^*$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > x^*$. On en déduit que $\varphi(x) < x$ pour tout $x > x^*$. D'autre part, on a toujours $\varphi(x) - x^* = \frac{f''(c)(x - x^*)^2}{2f'(x)}$ d'où $\varphi(x) \geq x^*$ (ce qui est clair géométriquement par convexité de f).

La suite (x_n) est donc bien définie dès que $x_0 \geq x^*$. De plus, nous avons montré que la suite est décroissante (même strictement si $x_0 \neq x^*$). (x_n) a donc une limite $l \geq x^*$ vérifiant $\varphi(l) = l$, nécessairement $l = x^*$. De plus, la convergence est toujours quadratique car la preuve précédente s'applique sans modification.

□

Leçons possibles

(118 Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.)

218 Applications des formules de Taylor.

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

(206 Utilisation de théorèmes de point fixe.)

224 Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

Références

[Rou03]

18 Lemme de MORSE

THÉORÈME (Lemme de Morse). Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq 3$.

Si a est un point critique non dégénéré de f (i.e. $f'(a) = 0$ et $f''(a)$ est une forme quadratique non dégénérée), alors il existe un changement de coordonnées locales $x \mapsto u$ de classe \mathcal{C}^{k-2} au voisinage de a tel que $f(x) = f(a) + u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$, où $(p, n - p)$ est la signature de $f''(a)$.

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme. Soit $S_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage U de S_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme $\alpha : U \rightarrow V \subset GL_n(\mathbb{R})$ envoyant S_0 sur I_n tel que $\forall S \in U, S = {}^t\alpha(S)S_0\alpha(S)$.

Preuve du lemme.

Soit $\beta : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tMS_0M$. Alors β est de classe \mathcal{C}^∞ (car polynômiale), et $\beta'(I_n)$ est l'application linéaire $H \mapsto {}^tHS_0 + S_0H$ (soit on l'écrit, soit on connaît la différentielle d'une application bilinéaire). $\beta'(I_n)$ est donc surjective : si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $H = \frac{1}{2}S_0^{-1}S$ est envoyé sur S par $\beta'(I_n)$. Soit F le sous-espace des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $S_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a $I_n \in F$ et on voit immédiatement que $\beta|_F(I_n) = \beta'(I_n)|_F$ est injective et surjective. D'après le théorème d'inversion locale, $\beta|_F$ induit un \mathcal{C}^∞ difféomorphisme d'un voisinage V de I_n dans F sur un voisinage U de S_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Quitte à restreindre, on peut supposer $V \subset GL_n(\mathbb{R})$. Il suffit de prendre pour α le difféomorphisme réciproque. □

Passons maintenant à la démonstration du théorème :

Preuve du théorème.

Quitte à poser $g(x) = f(x - a) - f(a)$, on peut supposer que $a = 0$ et $f(a) = 0$.

La formule de TAYLOR avec reste intégral à l'ordre 1 donne $f(x) = {}^txS(x)x$, où $S(x)$ est la matrice symétrique $\int_0^1 (1-t)f''(tx)dt$ (fonction de classe \mathcal{C}^{k-2} de x).

D'après le lemme précédent, pour x assez proche de 0 (de sorte que $Q(x)$ reste dans un voisinage de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$), on a $Q(x) = {}^t\alpha(Q(x))Q(0)\alpha(Q(x))$. Or $Q(0) = \frac{1}{2}f''(0)$ est de signature $(p, n - p)$, il existe donc une matrice inversible P telle que $Q(0) = {}^tPI_{p,n-p}P$.

Finalement, on a bien $f(x) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$, où $u = P\alpha(Q(x))x = \varphi(x)$, pour x assez proche de 0. De plus, φ est de classe \mathcal{C}^{k-2} et $\varphi'(0) = P$ est inversible, on en déduit que φ est un \mathcal{C}^{k-2} -difféomorphisme. □

On peut remarquer que cette forme réduite montre que les points critiques dégénérés sont isolés (f n'a pas d'autre point critique au voisinage de a).

On peut appliquer le lemme de MORSE à l'étude de la position d'une surface par rapport à son plan tangent. Pour simplifier, on se place dans le cas où le plan est « horizontal » en dimension 2.

Proposition. *Soit Σ une nappe paramétrée $z = f(x, y)$, où f est une fonction de classe (au moins) \mathcal{C}^3 . Soit (x_0, y_0) un point critique non dégénéré de f . Soit Π le plan tangent à Σ au point (x_0, y_0) (d'équation $z = z_0$).*

- Si $f''(a)$ est de signature $(2, 0)$, alors Σ est au dessus de Π au voisinage de a .
- Si $f''(a)$ est de signature $(0, 2)$, alors Σ est en dessous de Π au voisinage de a .
- Si $f''(a)$ est de signature $(1, 1)$, alors Σ traverse Π selon deux courbes qui se coupent en a .

Preuve.

Les deux premiers points sont une conséquence directe de l'écriture réduite de f .

Dans le troisième cas, on écrit que $f(x, y) = f(x_0, y_0) + u^2 - v^2$, on a donc $f(x, y) = z_0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 0$. La courbe de niveau de f se décompose donc en deux courbes C^+ , C^- définies implicitement par $u + v = 0$ et $u - v = 0$. La différentielle

$D(u + v) = (\partial_x u, +\partial_x v, \partial_y u, +\partial_y v)$ ne peut pas s'annuler, sinon $\varphi' = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$ ne

serait pas inversible. On en déduit que C^+ est une « vraie » courbe (sous-variété \mathcal{C}^1 du plan). Il en est de même pour C^- . □

Leçons possibles

131 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

214 Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications. ((**216** Étude de courbes. Exemples.))

217 Étude locale de surfaces. Exemples.

218 Applications des formules de Taylor.

(**219** Problèmes d'extremums.)

Références

[Rou03] pp.321 et suivantes, 341 et suivantes.

19 Intégrale de FRESNEL

L'objectif est de calculer la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{it} dt$ pour α fixé dans $]0, 1[$, on pourra en particulier en déduire la valeur de l'intégrale de FRESNEL $I = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$.

On commence par définir $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} t^{\alpha-1} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$ (on reconnaît la transformée de FOURIER de la « densité Γ »).

On montre que φ est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 en utilisant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- Pour tout $x \geq 0$, $t \mapsto e^{-t} e^{ixt} t^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car elle est continue (donc mesurable) et son module $t \mapsto e^{-t} t^{\alpha-1}$ est intégrable au voisinage de 0 et de $+\infty$ (respectivement par comparaison à une intégrale de RIEMANN et par croissances comparées).
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto e^{-t} e^{ixt} t^{\alpha-1}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et sa dérivée $x \mapsto i e^{-t} e^{ixt} t^\alpha$ est de module $e^{-t} t^\alpha$ qui est une fonction de t indépendante de x et intégrable sur $]0, +\infty[$.

On a de plus $\forall x \geq 0 \varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} t^\alpha dt$.

On effectue ensuite une intégration par parties sur $]0, +\infty[$, qui est autorisée ici car les fonctions utilisées sont de classe \mathcal{C}^∞ et les deux termes du membre de droite de l'égalité suivante sont convergents :

$$\varphi'(x) = i \left\{ \left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1} t^\alpha \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1} (\alpha t^{\alpha-1}) dt \right\}$$

Ce qui s'écrit encore $\varphi'(x) = \frac{-\alpha}{x+i} \varphi(x) = \frac{-\alpha(x-i)}{x^2+1} \varphi(x)$. Cette équation différentielle s'intègre de manière classique :

$$\varphi(x) = \varphi(0) e^{\alpha \int_0^x \frac{tdt}{t^2+1} + i\alpha \int_0^x \frac{dt}{t^2+1}}$$

Or on voit que $\varphi(0) = \Gamma(\alpha)$, et on connaît des primitives de $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$ et $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$ (respectivement $t \mapsto \frac{\log(t^2+1)}{2}$ et $t \mapsto \arctant$), de sorte qu'on trouve l'expression suivante pour φ :

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(1+x^2)^{-\alpha/2}} e^{i\alpha \arctant}$$

Afin de retrouver l'intégrale J , on fait le changement de variable $u = xt$ pour $x > 0$ dans l'expression initiale de φ : $\forall x > 0 \varphi(x) = x^{-\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-u/x} e^{iu} u^{\alpha-1} du$. Lorsque

$x \rightarrow +\infty$, $e^{-u/x} \rightarrow 1$ (pour tout $u > 0$), et nous allons montrer dans la suite que l'on peut intervertir la limite et l'intégrale, de sorte que $J = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \varphi(x)$. En utilisant l'expression trouvée pour φ , on en déduit que $J = \Gamma(\alpha)e^{i\alpha\pi/2}$.

Enfin, avant de démontrer notre assertion en suspens, voyons comment on dérive facilement de J la valeur de l'intégrale de FRESNEL : on effectue le changement de variable $t = x^2$ (qui est un difféomorphisme $]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$) et on prend $\alpha = 1/2$, il vient $J_{\alpha=1/2} = 2I$, d'où $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}$ (on a supposé connu que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

Il nous reste donc à montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \varphi(x) = J$, ce qui revient à dire que l'application $K : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $K(y) = \int_0^{+\infty} e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du$ pour $y > 0$ et par $K(0) = J$, est continue en 0. Les théorèmes classiques d'interversion de limite et d'intégrale ne s'appliquant pas tels quels, il faut travailler un peu. Nous allons montrer que K est continue en tant que limite uniforme des fonctions continues $K_n : y \geq 0 \mapsto \int_0^n e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du$.

Le fait que K_n soit continue se déduit du théorème relatif aux intégrales à paramètre (qui ne pose aucune difficulté ici puisqu'on intègre sur un compact), et l'existence de $K(0) = J$ (en tant qu'intégrale semi-convergente) se voit immédiatement après une intégration par parties.

On écrit que $|K_n(y) - K(y)| \leq \left| \int_n^{+\infty} e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du \right|$, inégalité valable pour $y > 0$ et pour $y = 0$. Par intégration par parties et majoration de e^{-uy} et $\left| \frac{1}{-y+i} \right|$ par 1, il vient $\int_n^{+\infty} e^{-uy} e^{iu} u^{\alpha-1} du = \frac{1}{-y+i} \left\{ [e^{(-y+i)u} u^{\alpha-1}]_n^{+\infty} + (\alpha-1) \int_n^{+\infty} e^{(-y+i)u} u^{\alpha-2} du \right\}$ d'où $|K_n(y) - K(y)| \leq n^{\alpha-1} + (\alpha-1) \int_n^{+\infty} u^{\alpha-2} du$. On a affaire au reste d'une intégrale convergente (car $\alpha-2 < -2$), d'où la convergence vers 0 (et indépendante de y). K est donc, comme nous l'avons annoncé, limite uniforme des K_n ; ceci boucle notre preuve.

Leçons possibles

235 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

237 Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de \mathbb{R} .

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

Références

[Gou94] p165 ex 4.2.

20 Calcul d'une intégrale

Le but est de calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1 + 2 \cos x)}{\cos x} dx$.

On commence par introduire la fonction $a > -1 \mapsto F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1 + a \cos x)}{\cos x} dx$.

Justifions que F est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, +\infty[$ (ce qui montre au passage que I est bien définie) :

- Pour tout $a > -1$, $x \mapsto \frac{\log(1 + a \cos x)}{\cos x}$ est une fonction continue donc mesurable sur $[0, \pi/2[$, de plus elle se prolonge continûment en $\pi/2$ (par la valeur a), elle est donc intégrable sur $[0, \pi/2[$.
- Pour tout $x \in [0, \pi/2[$, $a \mapsto \frac{\log(1 + a \cos x)}{\cos x}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, +\infty[$, et $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\log(1 + a \cos x)}{\cos x} \right) = \frac{1}{1 + a \cos x}$.
- Si $\alpha > -1$ est fixé, alors pour tout $a \geq \alpha$, $x \mapsto \frac{1}{1 + a \cos x}$ est une fonction mesurable (car continue) sur $[0, \pi/2[$ et dominée par la constante (intégrable) $\frac{1}{1 - \alpha}$.

Le théorème de dérivabilité relatif aux intégrales à paramètre nous permet d'affirmer que F est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, +\infty[$, de plus $\forall a > -1$

$$F'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \cos x}.$$

En faisant le changement de variable $u = \tan x/2$, qui est un difféomorphisme de $[0, \pi/2[$ sur $[0, 1[$, on a $dx = \frac{2du}{1 + u^2}$ et $\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$; il vient

$F'(a) = 2 \int_0^1 \frac{du}{(1 + a) + (1 - a)u^2}$. On distingue ensuite selon que $-1 < a < 1$ ou $a > 1$:

Si $-1 < a < 1$, on pose $a = \cos 2\theta$ avec $\theta \in]0, \pi/2[$. On a alors $1 + a = 2 \cos^2 \theta$ et $1 - a = 2 \sin^2 \theta$, si bien que $F'(a) = \int_0^1 \frac{du}{\cos^2 \theta + u^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \int_0^1 \frac{du}{1 + u^2 \tan^2 \theta}$.

En faisant le changement de variable affine $v = u \tan \theta$, on trouve $F'(a) = \frac{2}{\sin 2\theta} \int_0^{\tan \theta} \frac{dv}{1 + v^2} = \frac{2\theta}{\sin 2\theta}$. Comme $2\theta \in]0, \pi[$, on a $2\theta = \arccos a$ et $\sin 2\theta = \sqrt{1 - a^2}$, d'où finalement $F'(a) = \frac{\arccos a}{\sqrt{1 - a^2}}$.

Si $a > 1$, on pose $a = \operatorname{ch} 2\theta$ avec $\theta > 0$. On a cette fois $1 + a = 2 \operatorname{ch}^2 \theta$ et $1 - a = -2 \operatorname{sh}^2 \theta$,

si bien que $F'(a) = \int_0^1 \frac{du}{\operatorname{ch}^2\theta - u^2\operatorname{sh}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\theta} \int_0^1 \frac{du}{1 - u^2\operatorname{th}^2\theta}$. En faisant le changement de variable affine $v = u\operatorname{th}\theta$, il vient $F'(a) = \frac{2}{\operatorname{sh}2\theta} \int_0^{\operatorname{th}\theta} \frac{dv}{1 - v^2} = \frac{2\theta}{\operatorname{sh}2\theta}$ (car $\frac{dv}{1 - v^2} = d(\operatorname{th}v)$). Comme $2\theta > 0$, on a $2\theta = \operatorname{argcha}$ et $\operatorname{sh}2\theta = \sqrt{1 + a^2}$, d'où finalement $F'(a) = \frac{\operatorname{argcha}}{\sqrt{1 + a^2}}$.

On écrit ensuite que pour $-1 < a < 1$, on a $F(a) = F(0) + \int_0^a F'(t)dt$, soit $F(a) = \int_0^a \frac{\operatorname{arccost}}{\sqrt{1 - t^2}}dt$. Comme $d(\operatorname{arccost}) = \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}$, il vient $F(a) = \left[\frac{-\operatorname{arccos}^2 t}{2} \right]_0^a$ soit $F(a) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\operatorname{arccos}^2 a}{2}$. Par continuité de F en 1, on a au passage $F(1) = \frac{\pi^2}{8}$.

Enfin, on écrit que pour $a > 1$, $F(a) = F(1) + \int_0^a F'(t)dt$ soit $F(a) = \frac{\pi^2}{8} + \int_0^a \frac{\operatorname{argcht}}{\sqrt{1 + t^2}}dt$. Étant donné que $d(\operatorname{argcht}) = \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}$, il vient $F(a) = \frac{\pi^2}{8} + \left[\frac{\operatorname{argch}^2 t}{2} \right]_1^a$, finalement $F(a) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\operatorname{argch}^2 a}{2}$.

En particulier, $I = F(2) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\operatorname{argch}^2 2}{2}$. On peut se souvenir de l'identité $\operatorname{argch}x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ pour tout $x \geq 0$, ce qui donne $I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\log(2 + \sqrt{3})^2}{2}$.

Leçons possibles

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

233 Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

(**237** Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de \mathbb{R} .)

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Références

[Gou94] Problème 4 p.175.

21 Fonctions lipschitziennes

THÉORÈME. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement s'il existe une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt$.

Preuve.

Il est clair que s'il existe une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ comme dans l'énoncé, alors f est lipschitzienne : dans ce cas $|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |g(t)| dt \leq \|g\|_\infty |x - y|$. Étudions maintenant la réciproque.

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f \varphi'$ (en fait, T est par définition la dérivée de f au sens des distributions). Montrons que T se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$:

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On peut écrire que $\langle T, \varphi \rangle = - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} dx$ car la convergence de $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ vers $\varphi'(x)$ est uniforme en x , grâce à l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE : $\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x) \right| \leq \|\varphi''\|_\infty h$. Après un découpage, changement de

variable affine $x \leftarrow x + h$ puis recollage, il vient $\langle T, \varphi \rangle = - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \varphi(x) dx$.

On en déduit que $|\langle T, \varphi \rangle| \leq L \|\varphi\|_1$, où L est la constante de LIPSCHITZ de f . Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, on en déduit que T se prolonge en une unique forme linéaire (encore notée T) sur $L^1(\mathbb{R})$, dont la norme subordonnée reste $\leq L$.

Dans ce qui suit, nous allons reprendre la preuve de $(L^1(\mathbb{R}))' = L^\infty(\mathbb{R})$, adaptée à notre situation.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $L^2([-n, n]) \hookrightarrow L^1([-n, n]) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$, où les injections sont continues. La première injection est une conséquence directe de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. La seconde injection consiste simplement à prolonger une fonction par 0 en dehors de $[-n, n]$. On en déduit que T induit par restriction une forme linéaire continue sur $L^2([-n, n])$. Par le théorème de représentation de RIESZ ($L^2([-n, n])$ étant un espace de HILBERT), il existe une unique fonction $g_n \in L^2([-n, n])$ telle que $\forall \varphi \in L^2([-n, n]), \langle T, \varphi \rangle = \int_{[-n, n]} g_n \varphi$. Par unicité dans le théorème de RIESZ et parce que $L^2([-n, n]) \hookrightarrow L^2([-(n+1), n+1])$, on a $g_{n+1}|_{[-n, n]} = g_n$. On peut donc définir une unique fonction g presque partout sur \mathbb{R} par $g|_{[-n, n]} = g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que $g \in L^\infty(\mathbb{R})$: si ça n'était pas le cas, alors l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}, |g(x)| > L\}$ serait de mesure > 0 . Comme A est limite croissante des ensembles $A_n = A \cap [-n, n]$, A_n est de mesure > 0 à partir d'un certain rang N (par continuité à gauche de la mesure). Soit u à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $|g| = ug$ (une telle fonction existe et est mesurable) et posons $\varphi = u \mathbf{1}_{A_N} \in L^2([-N, N])$. On a $\langle T, \varphi \rangle = \int_{[-N, N]} ug \mathbf{1}_{A_N} = \int_{A_N} |g|$, on en déduit que $\langle T, \varphi \rangle > L \lambda(A_N)$ soit $\langle T, \varphi \rangle > L \|\varphi\|_1$, ce qui contredit le fait que T est une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$ de norme $\leq L$.

Posons $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. G est une fonction continue sur \mathbb{R} (car $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$). Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^0 \int_x^0 g(t)\varphi'(x)dtdx - \int_0^{+\infty} \int_0^x g(t)\varphi'(x)dtdx$$

On peut appliquer le théorème de FUBINI : par exemple pour la première intégrale, $(t, x) \mapsto g(t)\varphi'(x)\mathbf{1}_{\{x \leq t \leq 0\}}$ est bornée et nulle en dehors du compact $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2, x \in \text{Supp}\varphi, x \leq t \leq 0\}$. On écrit donc

$$-\int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t g(t)\varphi'(x)dxdt - \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} g(t)\varphi'(x)dxdt$$

Sachant que $\int_{-\infty}^t \varphi'(x)dx = -\int_t^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(t)$ et en se rappelant que $\varphi \in L^2([-n, n])$ pour un certain n , il vient

$$-\int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t)dt = \langle T, \varphi \rangle$$

d'où, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} (f - G)(t)\varphi'(t)dt = 0$$

La dérivée au sens des distributions de $f - G$ étant nulle (c'est, par définition, ce que dit l'égalité précédente), $f - G$ est une fonction constante presque partout, ce qu'on admet. Comme il s'agit de fonctions continues, on peut écrire que $f(x) = f(0) + (G(x) - G(0))$ pour tout réel x , soit $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt$. □

On peut remarquer que l'on a montré l'unicité (à équivalence presque partout près) de la fonction g .

On peut ici montrer ce qui a été admis, à savoir que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ est telle que $f' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors f est constante (presque partout). D'après l'injection de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, qui est classique, cela revient à montrer que $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = C \int_{\mathbb{R}} \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (où C est une constante à déterminer). Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \theta = 1$, posons $\psi = \varphi - (\int_{\mathbb{R}} \varphi)\theta$. On a $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$, si bien que $x \mapsto \xi(x) = \int_{-\infty}^x \psi$ est élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On peut donc écrire que $\int_{\mathbb{R}} f\psi = -\int_{\mathbb{R}} f\xi' = 0$, si bien que $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = \int_{\mathbb{R}} f\theta \int_{\mathbb{R}} \varphi$, ce qu'on voulait.

Enfin, montrons rapidement l'injection de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il s'agit de montrer que $f \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0$. Pour cela, il suffit de montrer que $f \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0$ sur chaque intervalle $[-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), une réunion dénombrable d'ensembles négligeables étant négligeable. Fixons donc $n \in \mathbb{N}^*$, et soit θ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta \equiv 1$ sur $[-n, n]$. Soit $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une

approximation de l'unité. On a $(f\theta) * \rho_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f\theta$ dans $L^1(\mathbb{R})$. D'autre part, à x fixé, $[(f\theta) * \rho_k](x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)[\varphi(y)\rho_k(x-y)]dy = 0$ car $y \mapsto \varphi(y)\rho_k(x-y)$ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On en déduit que $f\theta \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0$, en particulier $f \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0$ sur $[-n, n]$, ce qu'il fallait.

Leçons possibles

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

(**202** Exemples de parties denses et applications.)

207 Prolongement de fonctions. Applications.

(**209** Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.)

210 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

234 Espaces L^p

((**235** Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.))

Références

bréziš, hirsh-lacombe

22 Étude d'un système dynamique discret et de son équivalent continu

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) \in]-1, 0[$ et $-x < f(x) < 0 \forall x \in]0, 1[$.

On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0, 1[$ et $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$. Il est immédiat qu'une telle suite est bien définie.

Proposition.

- (i) $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (ii) Pour n suffisamment grand, $\exists ! \varphi(n) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\varphi(n)+1} \leq \frac{1}{n} < x_{\varphi(n)}$.
- (iii) $\varphi(n) \sim C \log n$ quand $n \rightarrow +\infty$ (où C est une constante > 0).

Preuve.

Il est clair que la suite (x_n) est strictement décroissante et minorée par 0. Elle a donc une limite l qui doit vérifier $0 \leq l < x_0$ et $f(l) = l$, bref $l = 0$, d'où le point (i).

Pour le point (ii), il suffit de remarquer que si n est assez grand pour que $\frac{1}{n} < x_0$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, x_k > \frac{1}{n}\}$ est non vide et fini, on prend alors pour $\varphi(n)$ son plus grand élément. L'unicité est immédiate par stricte décroissance de la suite.

Enfin, on écrit que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{f(x_n)}{x_n}$, donc $\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + f'(0)$. On en déduit que $\log(x_{n+1}) - \log(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \log(1 + f'(0))$. Notons $\alpha = -\log(1 + f'(0)) > 0$. Par le théorème de CESÀRO, $\log(x_n) \sim -n\alpha$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par le point (ii), on a $\log(x_{\varphi(n)+1}) \leq -\log(n) < \log(x_{\varphi(n)})$ dès que n est assez grand. Puisque $\log(x_{\varphi(n)+1}) \sim \log(x_{\varphi(n)}) \sim -\alpha\varphi(n)$ quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\log(n) \sim \alpha\varphi(n)$, d'où le résultat avec $C = \frac{1}{\alpha}$. □

On considère maintenant l'équation différentielle ordinaire
$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \text{ pour } x_0 \in]0, 1[.$$
 Nous montrerons que cette E.D.O. admet une unique solution globale x .

Proposition.

- (i) $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.
- (ii) Pour n suffisamment grand, $\exists ! t_n > 0$ tel que $x(t_n) = \frac{1}{n}$.
- (iii) $t_n \sim C \log n$ quand $n \rightarrow +\infty$ (où C est une constante > 0).

Preuve.

Commençons par montrer que l'équation différentielle admet une solution globale. On prolonge f (de manière affine) en une fonction \tilde{f} de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . L'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} x' = \tilde{f}(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
 admet une unique solution globale d'après le théorème de

CAUCHY-LIPSCHITZ global (\tilde{f} est globalement lipschitzienne sur \mathbb{R}). De plus, 0 et 1 étant des points critiques de \tilde{f} , cette solution ne sort pas de $]0, 1[$ (par unicité dans le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ). x est donc l'unique solution maximale de l'équation différentielle initiale, et c'est une solution globale.

De plus, x est strictement décroissante (car $f' < 0$ sur $]0, 1[$), x a donc une limite $l \in [0, x_0[$ quand $t \rightarrow +\infty$. Pour $t > 0$, il existe $c_t \in]t, t+1[$ tel que $x(t+1) - x(t) = f(x(c_t))$ (théorème des accroissements finis). En prenant la limite quand $t \rightarrow +\infty$, on obtient $0 = f(l)$. On en déduit que $l = 0$, et le point (i) est montré.

Par continuité et stricte décroissance de x vers 0, il est clair que dès que $\frac{1}{n} < x_0$, $\exists t_n > 0$ tel que $x(t_n) = \frac{1}{n}$, d'où le point (ii).

Enfin, $x'(t) = f(x(t)) \sim f'(0)x(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$. On en déduit que $\frac{dx}{x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} f'(0)$. Par comparaison des intégrales, on obtient $\log(x(t)) \sim f'(0)t$ quand $t \rightarrow +\infty$, en particulier (pour $t = t_n$) $-\log n \sim f'(0)t_n$, d'où le point (iii). \square

Notons que la constante C n'est pas la même dans le cas discret et dans le cas continu.

Leçons possibles

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

222 Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

224 Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

227 Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

Références

Francinou X-ENS

23 Méthode de LAPLACE

Soit $I = [a, b[$ un intervalle de \mathbb{R} avec $a < b \leq +\infty$. On se donne une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, continue en a avec $f(a) \neq 0$. On suppose de plus que $x \mapsto e^{-t_0\varphi(x)}f(x)$ est intégrable sur I pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$. On cherche un équivalent quand $t \rightarrow +\infty$ de $F(t) = \int_I e^{-t\varphi(x)}f(x)dx$.

1. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x$, alors $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}$.
2. Si $\varphi' > 0$ sur I , alors $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(a)}{\varphi'(a)} \frac{e^{-t\varphi(a)}}{t}$.
3. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$, alors $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{f(0)}{\sqrt{t}}$.
4. Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, alors $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} f(a) \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)}}{\sqrt{t}}$.

On donnera l'application suivante (5.) : $\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}$, d'où on déduit en particulier la formule de STIRLING $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Preuve.

On commence par remarquer que $F(t)$ existe pour $t \geq t_0$, puisque $|e^{-t\varphi}f(x)| \leq e^{-(t-t_0)\varphi(a)}|e^{-t_0\varphi(x)}f(x)|$ pour $t \geq t_0$ (dans tous les cas considérés, φ est strictement croissante sur I). De plus, une application directe du théorème de continuité des intégrales à paramètre donne que F est une fonction continue de t pour $t \geq t_0$. En fait, on ne perd pas de généralité à supposer que $t_0 = 0$, quitte à remplacer t par $t-t_0$ et f par $e^{-t_0\varphi}f$.

Traisons maintenant le cas 1. Comme f est continue en 0, f est bornée au voisinage de 0 : on écrit que $|f(x)| \leq M$ pour $0 \leq x \leq \alpha$ ($M > 0$, $0 < \alpha < b$). On a d'une part $\int_0^\alpha e^{-tx}f(x)dx = \frac{1}{t} \int_0^{t\alpha} e^{-u}f(u/t)du$ avec $\int_0^{t\alpha} e^{-u}f(u/t)du \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} f(0)$ par convergence dominée, d'autre part $|\int_\alpha^\beta e^{-tx}f(x)dx| \leq e^{-t\alpha} \int_0^\beta |f(x)|dx = O(e^{-t\alpha})$. En recollant, on obtient bien $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}$.

Pour le cas 2., on écrit que le changement de variable $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(a)$ est un difféomorphisme de $[a, b[$ sur un intervalle $[0, c[$. Soit ψ le difféomorphisme réciproque. Il vient $F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-t\psi(y)}f(\psi(y))\psi'(y)dy$. Le cas 1. s'applique, sachant que $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = \frac{1}{\varphi'(a)}$ on a bien $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(a)}{\varphi'(a)} \frac{e^{-t\varphi(a)}}{t}$.

Dans le cas 3., on reprend la méthode du cas 1 : $\int_0^\alpha e^{-tx^2}f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{t}\alpha} e^{-u^2}f(u/\sqrt{t})du$. Par convergence dominée, $\sqrt{t} \int_0^\alpha e^{-tx^2}f(x)dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$. D'autre part, $\left| \int_\alpha^\beta e^{-tx^2}f(x)dx \right| \leq e^{-t\alpha^2} \int_0^\beta |f(x)|dx = O(e^{-t\alpha^2})$. Finalement $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{f(0)}{\sqrt{t}}$.

Enfin, dans le cas 4. on écrit que $x \mapsto y = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$ est un difféomorphisme de $[a, b[$ sur un intervalle $[0, c[$, avec $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{|x=a} = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}$. Soit ψ l'application ré-

ci-proque. On a $F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-ty^2} f(\psi(y))\psi'(y)dy$, d'après le cas 3. il vient $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} f(a) \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)}}{\sqrt{t}}$, sachant que $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = \sqrt{\frac{2}{\varphi''(a)}}$.

Passons maintenant à l'application. On écrit que $\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^t dx$, après le changement de variable $x = t(u+1) : \Gamma(t+1) = \int_{-1}^\infty e^{-t(u+1)} (t(u+1))^t du = t^{t+1} \int_{-1}^\infty e^{-t\varphi(u)} du$, où $\varphi(u) = 1+u - \log(1+u)$.

On coupe l'intégrale en deux et on écrit $\int_0^\infty e^{-t\varphi(u)} du \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ et $\int_{-1}^0 e^{-t\varphi(u)} du = \int_0^1 e^{-t\varphi(-u)} du \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ (dans les deux cas, c'est une application directe du cas 4.). Finalement, $\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}$, ce qu'on voulait. □

Leçons possibles

227 Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

(**233** Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.)

235 Interversión d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.

(**236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.)

237 Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de \mathbb{R} .

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

(**247** Exemples de problèmes d'interversión de limites.)

Références

[Rou03] pp.341 et suivantes.

24 Sous-espaces fermés de L^p

THÉORÈME (GROTHENDIECK). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. On se place dans $L^p = L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. Si F est un sous-espace fermé de L^p et $F \subset L^\infty$, alors $\dim_{\mathbb{C}} F < +\infty$.

Preuve.

On commence par remarquer que l'injection canonique $(F, \|\cdot\|_p) \hookrightarrow L^\infty$ est continue grâce au théorème du graphe fermé. Celui-ci s'applique car $(F, \|\cdot\|_p)$ et L^∞ sont des espaces de BANACH. Supposons que $f_n \in F \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans L^p et $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g$ dans L^∞ . On peut extraire une sous-suite de (f_n) qui converge vers f presque partout. On en déduit que $f \stackrel{p.p.}{=} g$, ce qu'il fallait.

Comme on a aussi une injection continue $L^\infty \hookrightarrow L^p$ (car Ω est de mesure finie), on en déduit que les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont (fortement) équivalentes sur F .

Montrons maintenant que $F \subset L^2$ et que l'injection canonique $(F, \|\cdot\|_2) \hookrightarrow L^p$ est continue. Si $p < 2$, c'est clair (Ω est de mesure finie). Si $p > 2$, on a toujours $F \subset L^2$ (car $L^\infty \subset L^2$). On écrit ensuite que (pour $f \in F$) $\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^{p-2} |f|^2$ d'où $\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2$. On sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_2$. Finalement, $\|f\|_p \leq C^{\frac{p-2}{p}} \|f\|_2$, d'où le résultat.

Si F est de dimension $\geq n$ (sur \mathbb{C}), il existe une famille f_1, \dots, f_n orthonormale (pour L^2). On note B la boule unité de \mathbb{C}^n pour la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $c = (c_1, \dots, c_n) \in B$, on pose $f_c = \sum_{i=1}^n c_i f_i$. Remarquons que $\|f_c\|_2 \leq 1$.

Sachant que B est séparable, soit $(c_k)_{k \geq 1}$ une suite dense dans B . Pour chaque k , il existe une partie (mesurable) de mesure totale Ω_k telle que $\|f_{c_k}\| = \sup_{\Omega_k} |f_{c_k}|$ (et non pas « sup essentiel »). $\Omega' = \bigcap_k \Omega_k$ est encore une partie mesurable de mesure totale vérifiant la propriété précédente ($\forall k$). Alors $\forall x \in \Omega'$, $|f_{c_k}(x)| \leq \|f_{c_k}\|_\infty$, et comme $(F, \|\cdot\|_\infty) \hookrightarrow (F, \|\cdot\|_p) \hookrightarrow (F, \|\cdot\|_2)$, $|f_{c_k}(x)| \leq \alpha$ où α est une constante > 0 . Par densité, il s'ensuit immédiatement que $|f_c(x)| \leq \alpha$ pour tout $c \in B$ et pour tout $x \in \Omega'$.

Posons maintenant
$$c(x) = \begin{cases} \frac{(\bar{f}_1(x), \dots, \bar{f}_n(x))}{\|(f_1(x), \dots, f_n(x))\|_2} & \text{si } \exists i, f_i(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ ceci pour } x \in \Omega'. \text{ Il vient}$$

alors $f_{c(x)}(x)^2 = \sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2$. D'après ce qui précède, on a donc $\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \leq \alpha^2$. En intégrant sur Ω' , il vient $n \leq \alpha^2 \mu(\Omega)$; F est donc de dimension finie. □

Leçons possibles

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

(**202** Exemples de parties denses et applications.)

205 Espaces complets. Exemples et applications.

209 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.

210 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

234 Espaces L^p .

Références

Rudin ANAF

25 Théorème de stabilité de LIAPOUNOV

THÉORÈME (LIAPOUNOV). *On considère l'équation différentielle (E) : $x' = f(x)$, où f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n . On suppose que a est un point de U tel que $f(a) = 0$ et les valeurs propres de $f'(a)$ sont toutes de partie réelle < 0 .*

Les solutions de (E) ont même comportement asymptotique au voisinage de a que celles de l'équation linéarisée (L) : $x' = f'(a)(x - a)$: a est un point d'équilibre exponentiellement attractif de (E) et (L).

Nous verrons au passage que les solutions de (E) sont globales dès que la donnée initiale est suffisamment proche de a .

Preuve.

Quitte à traduire, on peut supposer $a = 0$. Dans la suite, on notera $A = f'(0)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A (comptées sans multiplicité). On notera aussi $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^n .

Soit $x_0 \in U$, notons $y(t)$ l'unique solution maximale de (E) telle que $y(0) = x_0$ (donnée par le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ) et $z(t)$ l'unique solution globale de (L) avec même condition initiale (donnée par le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire). On sait que $z(t) = e^{tA}x_0$.

Lemme. $\forall t \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n \|e^{tA}x\| \leq C(1 + |t|)^{n-1} (\sum_{i=1}^r e^{t\operatorname{Re}\lambda_i}) \|x\|$, où C est une constante > 0 . En particulier, si α est un réel > 0 tel que $\alpha < \min -\operatorname{Re}\lambda_i$, alors $\|e^{tA}x\| \leq e^{-\alpha t}\|x\|$ quand t est voisin de $+\infty$.

On écrit $x = x_1 + \dots + x_r$, où x_i est dans le sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre λ_i . Il vient $e^{tA}x_i = e^{t\lambda_i}e^{t(A-\lambda_i)}x_i$ puis $e^{tA}x_i = e^{t\lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(A-\lambda_i)^k}{k!} t^k \right) x_i$, où m_i est la multiplicité de λ_i . On donc peut trouver une constante $C_i > 0$ telle que $\|e^{tA}x_i\| \leq C_i(1 + |t|)^{n-1} e^{t\operatorname{Re}\lambda_i} \|x_i\|$. En « recollant », il vient $\|e^{tA}x\| \leq (\max C_i)(1 + |t|)^{n-1} (\sum_{i=1}^r e^{t\operatorname{Re}\lambda_i}) \max \|x_i\|$. On conclut par l'équivalence des normes sur \mathbb{R}^n . La deuxième assertion s'ensuit immédiatement de la première.

Une première conséquence (immédiate) de ce lemme est que $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. On voudrait montrer que c'est également le cas de $y(t)$ pourvu que x_0 soit assez proche de a .

Posons $b(x, x') = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}x' \rangle dt$ pour $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Cette intégrale est (absolument) convergente grâce au lemme précédent. b est une forme bilinéaire symétrique, de plus b est définie positive. En effet, si $q(x) = 0$ (où on a noté $q(x) = b(x, x)$); alors $\int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 dt = 0$. La fonction sous l'intégrale étant continue, on doit avoir $e^{tA}x = 0 \forall t$ et donc $x = 0$ (prendre $t = 0$). q est appelée fonction de LIAPOUNOV. Nous allons étudier le comportement de $q(y(t))$.

On a $q(y(t))' = 2b(y(t), y'(t))$ soit $q(y(t))' = 2b(y(t), Ay(t)) + 2b(y(t), r(y(t)))$ où on a noté $f(x) = Ax + r(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. D'une part, $b(y(t), r(y(t))) \leq \|y(t)\|_b \|r(y(t))\|_b$, où $\|\cdot\|_b = \sqrt{q}$ est la norme euclidienne associée à b (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ). D'autre part, on a pour $x \in \mathbb{R}^n$ $2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle dt$. La fonction sous l'intégrale étant la dérivée de $t \mapsto \|e^{tA}x\|^2$, il vient $2b(x, Ax) = -\|x\|^2$ puis $2b(x, Ax) \leq -Mq(x)$, où M est une constante > 0 donnée par l'équivalence des normes. Ainsi $q(y(t))' \leq -Mq(y(t)) + \|y(t)\|_b \|r(y(t))\|_b$. Par définition de la différentiabilité de f en 0 (qui ne dépend pas de la norme choisie), il existe $\eta > 0$ tel que $\|x\|_b \leq \eta \Rightarrow \|r(x)\|_b \leq \frac{M}{2}\|x\|_b$. Ainsi $q(y(t))' \leq -\frac{M}{2}q(y(t))$ dès que $\|y(t)\|_b \leq \eta$.

Supposons maintenant que l'on a pris $\|x_0\|_b < \eta$. Alors $\|y(t)\|_b < \eta \forall t > 0$. En effet, sinon il existe un plus petit temps t_1 tel que $\|y(t_1)\|_b = \eta$, or $\|y(t)\|_b$ décroît avec t au voisinage de t_1 : ceci contredit la minimalité de t_1 . On en déduit que $y(t)$ reste dans $B_b(0, \eta) \forall t > 0$. D'après le théorème de fuite à la frontière (ou « explosion en temps fini »), y est une solution globale (définie $\forall t > 0$). De plus, l'inégalité $q(y(t))' \leq -\frac{M}{2}q(y(t))$ s'intègre en $q(y(t)) \leq e^{-\frac{M}{2}t}$, ce qui prouve que $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. \square

On peut remarquer que l'on a seulement eu besoin que f soit localement lipschitzienne au voisinage de a et différentiable en a .

Leçons possibles

((124 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.))

127 Exponentielle de matrices. Applications.

(211 Utilisation de la dimension finie en analyse.)

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

(222 Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.)

Références

[Rou03]

26 Continuité des fonctions convexes

THÉORÈME. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe où Ω est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$). Alors f est continue sur Ω , elle est même lipschitzienne sur les compacts de Ω .

Preuve.

On commence par deux lemmes.

Lemme 1. Sous les hypothèses précédentes, si f est bornée sur Ω alors elle est lipschitzienne sur les compacts de Ω .

En effet, soit K un compact de Ω , alors $\exists \eta > 0$ tel que $K + 2B(0, \eta) \subset \Omega$ (on a choisi une norme quelconque sur \mathbb{R}^n). Soient $x, y \in K$, alors $z = x + \eta \frac{x-y}{\|x-y\|}$ est dans Ω et $x = \theta z + (1-\theta)y$, avec $\theta = \frac{\|x-y\|}{\|x-y\| + \eta}$. On en déduit que $f(x) \leq \theta f(z) + (1-\theta)f(y)$, d'où $f(x) - f(y) \leq \theta(f(z) - f(y))$ puis $f(x) - f(y) \leq \frac{2M}{\eta} \|x-y\|$, où $M = \sup_{\Omega} f$. x et y jouant des rôles symétriques, on a la même inégalité sur $f(y) - f(x)$. Ceci prouve que f est $\frac{2M}{\eta}$ -lipschitzienne sur K .

Lemme 2. Toujours sous les hypothèses du théorème, f est minorée par une fonction affine.

On rappelle que l'épigraphe de f est $\text{Epi}(f) = \{(x, r) \in \Omega \times \mathbb{R}, f(x) \geq r\}$. Soit maintenant $(x_0, r) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < r$. Il est clair que $(x_0, r) \notin \overline{\text{Epi}(f)}$, qui est un convexe fermé de \mathbb{R}^{n+1} . Par le théorème de projection sur un convexe fermé (ou par le théorème de HAHN-BANACH géométrique), il existe un hyperplan de \mathbb{R}^{n+1} qui sépare (même strictement) (x_0, r) et $\overline{\text{Epi}(f)}$; ainsi $\text{Epi}(f)$ est au-dessus d'un hyperplan (il ne peut pas être en dessous). En particulier le graphe de f est au-dessus d'un hyperplan, qui est le graphe d'une fonction affine, d'où le résultat.

Passons maintenant à la preuve du théorème. Soit $x \in \Omega$, on peut trouver un simplexe $\Delta \subset \Omega$ qui est un voisinage de x . Comme Δ est compact et f est minorée par une fonction affine, f est minorée sur Δ . D'autre part, tout point de Δ est barycentre des sommets s_1, \dots, s_{n+1} de Δ . On en déduit que $f(x) \leq \max_i f(s_i)$ pour tout $x \in \Delta$ par convexité de f , f est donc majorée sur Δ . Finalement f est bornée sur Δ , et on peut appliquer le premier lemme : f est lipschitzienne sur les compacts de Δ . En particulier, f est continue au point x . On a ainsi montré que f est continue sur Ω .

Enfin, soit K un compact de Ω , alors on peut trouver un compact $K' \subset \Omega$ tel que $K \subset \overset{\circ}{K}'$. f est continue donc bornée sur K' , on peut donc appliquer de nouveau le lemme 1, qui montre que f est lipschitzienne sur K .

□

Leçons possibles

203 Utilisation de la notion de compacité.

211 Utilisation de la dimension finie en analyse.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

252 Parties convexes, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables). Applications.

Références

Références

- [AK02] Grégoire ALLAIRE et Sidi Mahmoud KABER : *Algèbre linéaire numérique*. ellipses, 2002.
- [BMP05] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ : *Objectif Agrégation (2e édition)*. H&K, 2005.
- [Dem06] Jean-Pierre DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.
- [Gou94] Xavier GOURDON : *les maths en tête - Analyse*. ellipses, 1994.
- [Jim] JIMMY : Cahier d'analyse.
- [Pel] Sébastien PELLERIN : *Développements d'analyse pour l'oral de l'agrégation*.
- [QZ02] Hervé QUÉFFELEC et Claude ZUILY : *Éléments d'analyse (2e édition)*. Dunod, 2002.
- [Rou03] François ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel (2e édition)*. Cassini, 2003.
- [Ser01] Denis SERRE : *Les Matrices*. Dunod, 2001.
- [Wil70] Stephen WILLARD : *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.